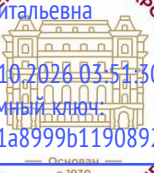


Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Щёкина Вера Михайловна
Должность: Ректор
Дата подписания: 22.10.2026 03:51:30
Уникальный программный ключ:
a2232a55157e578551a8999b119089265398994147118881731454451778977

	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ

Декан
физико-математического факультета
ФГБОУ ВО «БГПУ»
 Т.А. Меределина
«24» мая 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины
АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Направление подготовки

**02.03.03 – МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И
АДМИНИСТРИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

Профиль

ТЕХНОЛОГИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята
на заседании кафедры физического
и математического образования
(протокол № 9 от «24» мая 2023 г.)**

Благовещенск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ	4
3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)	6
4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ	8
5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	10
6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....	10
7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ	30
В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ	30
8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ	30
9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ	30
10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА	31
11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ	32

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: обучение студентов, специализирующихся в области математического обеспечения информационных систем, основам современной алгебры и теории чисел, позиционированию методов алгебры и теории чисел среди общематематических подходов к информационным технологиям, а также применению полученных знаний и навыков к решению ряда профессиональных задач.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Алгебра и теория чисел» относится к дисциплинам обязательной части (части, формируемой участниками образовательных отношений) блока Б1 (Б1.О.17).

Преподавание дисциплины связано с другими дисциплинами учебного плана: «Дискретная математика», «Математический анализ», «Геометрия».

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1:

- **ОПК-1.** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, **индикаторами** достижения которой является:

- ОПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук;
- ОПК-1.2 – **умеет** использовать их в профессиональной деятельности;
- ОПК-1.3 – **имеет** навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

- **ПК-1.** Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий, **индикаторами** достижения которой является:

- ПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- развитие понятия числа;
- теоретическое обоснование решения систем линейных уравнений;
- свойства линейных операторов;
- свойства квадратичных форм;
- свойства неприводимых многочленов;
- решение алгебраических уравнений;
- свойства элементарных симметрических многочленов;
- теорию сравнений;
- систематические числа.

уметь:

- определять тип алгебраической структуры;
- решать систем линейных уравнений;
- находить собственные значения линейного оператора;
- приводить квадратичную форму к каноническому виду;
- разлагать многочлен на неприводимые множители;

- разлагать симметрический многочлен на элементарные многочлены.
- решать типовые задачи на делимость;
- обосновывать признаки делимости.

владеть:

- навыками решения типовых алгебраических и теоретико-числовых задач.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Алгебра и теория чисел» составляет 7 зачетных единиц (далее – 3Е) (252 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и лабораторных занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 1	Семестр 2
Общая трудоемкость	252	108	108
Аудиторные занятия	120	58	62
Лекции	54	26	28
Практические занятия	66	32	34
Самостоятельная работа	96	50	46
Вид итогового контроля	36	Экзамен	Зачет

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	1 семестр				
1.	Тема 1. Основные алгебраические структуры. Алгебры. Числовые поля. Комплексные числа	36	10	10	16
2.	Тема 2. Матрицы и определители	40	10	12	18
3.	Тема 3. Векторные пространства. Общая теория систем линейных уравнений	32	6	10	16
	Экзамен	36			

	Итого за 1 семестр	144	26	32	50
	2 семестр				
4.	Тема 4. Линейные операторы.	18	4	6	8
5.	Тема 5. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.	16	4	4	8
6.	Тема 6. Многочлены от одной переменной над произвольным полем.	16	4	4	8
7.	Тема 7. Многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел	20	4	6	10
8.	Тема 8. Делимость и простые числа.	12	4	4	4
9.	Тема 9. Арифметические функции.	12	4	4	4
10.	Тема 10. Теория сравнений.	14	4	6	4
Зачет					
	Итого за 2 семестр	108	28	34	46
ИТОГО		252	54	66	96

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема 2. Матрицы и определители			6
2.	Тема 3. Векторные пространства. Общая теория систем линейных уравнений			6
3.	Тема 4. Линейные операторы.			4
4.	Тема 5. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.			4
5.	Тема 6. Многочлены от одной переменной над произвольным полем.			4
6.	Тема 10. Теория сравнений.			6
ИТОГО				30

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Основные алгебраические структуры. Алгебры. Числовые поля. Комплексные числа

Множества и операции над ними. Отображения, инъекции, сюръекции, биекции. Композиция отображений, обратимые отображения. Бинарные отношения и эквивалентность. Классы эквивалентности и фактор-множество. Алгебраические операции. Определение группы. Конечные и бесконечные группы. Абелевы группы. Примеры групп. Подгруппа. Критерий подгруппы. Примеры подгрупп. Симметрическая и знакопеременная группы. Определение кольца. Кольца с единицей, коммутативные кольца, тела, поля, области целостности. Примеры колец. Вычитание в кольцах, деление в полях. Группа обратимых элементов кольца с единицей. Определение поля комплексных чисел. Действия в компонентах. Комплексное сопряжение. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма записи. Тригонометрическая форма произведения и частного. Формула Муавра и ее применение в вещественных вычислениях. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы, первообразные корни. Решение алгебраических уравнений низких степеней.

Тема 2. Матрицы и определители

Сложение матриц, свойства сложения. Умножение матрицы на скаляр, свойства. Линейное преобразование переменных и его матрица. Композиция линейных преобразований и матрица композиции. Умножение прямоугольных матриц. Ассоциативность матричного умножения, дистрибутивность. Единичная матрица. Транспонирование, его связь с матричным умножением. Определители второго и третьего порядков. Перестановки и инверсии. Четные и нечетные перестановки. Транспозиции. Определение детерминанта квадратной матрицы произвольного порядка. Определитель треугольной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Перестановка строк и свойства линейности. Минор и алгебраическое дополнение элемента. Разложение определителя по элементам строки. Свойство ортогональности строки и алгебраических дополнений к элементам другой строки. Методы вычисления определителей. Определитель Вандермонда. Определитель клеточно-треугольной матрицы. Минор произвольного порядка. Формулировка теоремы Лапласа. Ранг прямоугольной матрицы в терминах ее миноров. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях над матрицей. Ранг трапециевидной матрицы. Кольцо квадратных матриц фиксированного порядка, его некоммутативность. Многочлен от матрицы. Делители нуля в матричном кольце. Определитель произведения квадратных матриц. Невырожденные матрицы. Полная линейная группа. Методы вычисления обратной матрицы.

Тема 3. Векторные пространства. Общая теория систем линейных уравнений

Определения векторного пространства и алгебры, примеры. Примеры векторных пространств. Линейные комбинации векторов. Системы образующих. Конечномерные пространства. Линейная независимость векторов, свойства. Базис конечномерного пространства, его существование. Размерность. Изоморфизм пространств, связь размерностей. Координаты вектора относительно данного базиса. Изменение координат при замене базиса. Матрица перехода и ее свойства. Подпространство, его размерность. Ранг матрицы как размерность линейной оболочки строк. Размерность линейной оболочки столбцов матрицы. Фактор-пространство, его размерность. Сумма и пересечение подпространств, соотношение между их размерностями. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма, связь с прямой суммой подпространств. Матричная запись системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы. Теорема Крамера. Метод Гаусса решения линейных систем. Теорема Кронекера-Капелли. Число решений линейной системы. Однородные системы, условия существования нетривиального решения. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем.

Тема 4. Линейные операторы

Определение линейного отображения векторных пространств, примеры. Операции над линейными отображениями. Ядро и образ Матрица линейного отображения. Поведение матрицы линейного отображения при операциях с отображениями. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Матрица линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы оператора, связь с матричными понятиями. Характеристический многочлен оператора.

Тема 5. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду

Квадратичная форма как однородный многочлен второй степени. Диагональная квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Лагранжа. Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Якоби. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

Тема 6. Многочлены от одной переменной над произвольным полем

Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Степень многочлена, свойства степени. Теорема о делении с остатком для многочленов. Приводимые и неприводимые многочлены. Определение алгебраически замкнутого поля. Обратимые элементы в кольце многочленов. Каноническое разложение полинома. Значение многочлена. Корни. Теорема Безу. Схема Горнера. Число корней многочлена. Теорема о тождестве многочленов. Характеристика поля. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена. Кратные корни и производная. Освобождение от кратных корней. Формулы Виета. Дробно-рациональные функции. Правильные дроби. Простейшие дроби. Теорема о разложении на простейшие дроби.

Тема 7. Многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел, разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей. Формулы Виета. Сопреженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых множителей. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

Тема 8. Делимость и простые числа

Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел. НОД и НОК целых чисел, их свойства. Алгоритм Евклида и его приложения. Свойства взаимно простых чисел. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Теорема о разложении натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение натурального числа. Основное свойство простого числа.

Тема 9. Арифметические функции

Целая и дробная части числа. Расстояние до ближайшего целого. Сумма делителей $\sigma(n)$ и число делителей $\tau(n)$. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Мультипликативность и явные формулы.

Тема 10. Теория сравнений

Отношение сравнимости в кольце целых чисел и его свойства. Классы целых чисел по данному модулю и их свойства. Кольцо классов вычетов. Теорема о делителях нуля в кольце классов вычетов. Поле вычетов по простому модулю. Мультипликативная группа классов вычетов, взаимно простых с модулем.

Полная и приведенная системы вычетов по данному модулю и их свойства. Теоремы о вычетах линейных форм. Теоремы Эйлера и Ферма.

Сравнение и система сравнений с неизвестной величиной. Решение системы сравнений с неизвестной величиной. Сравнения первой степени. Теорема о числе решений сравнения первой степени. Цепная дробь, порядок цепной дроби, неполные частные цепной дроби, подходящие дроби, числители и знаменатели подходящих дробей, значение цепной дроби, полные частные цепной дроби, канонические цепные дроби. Свойства числителей и знаменателей подходящих дробей. Свойства подходящих дробей. Критерий разрешимости

$$\text{системы } \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}.$$

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Общие методические рекомендации

Рабочая программа дисциплины призвана помочь студентам физико-математического факультета в организации самостоятельной работы по освоению дисциплины «Алгебра и теория чисел».

Согласно учебного плана организация учебной деятельности по дисциплине «Алгебра и теория чисел» предусматривает следующие формы: лекция, практическое занятие, самостоятельная работа, контрольная работа.

4.2 Методические рекомендации по подготовке к лекциям

Курс лекций строится на основе четких понятий и формулировок, так как только при таком походе студенты приобретают культуру абстрактного мышления, необходимую для высококвалифицированного специалиста в любой отрасли знаний, а также на разборе типовых задач и алгоритмов их решения.

4.3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы. Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, активной работы на семинарах, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

4.4 Методические указания к самостоятельной работе студентов

Для успешного усвоения дисциплины необходима правильная организация самостоятельной работы студентов. Эта работа должна содержать:

- регулярную (еженедельную) проработку теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованной литературе;
- регулярную (еженедельную) подготовку к практическим занятиям, в том числе выполнение домашних заданий;
- подготовка к контрольной работе и ее успешное выполнение.

В качестве образца решения задач следует брать те решения, которые приводились преподавателем на лекциях или выполнялись на практических занятиях. При появлении ка-

ких-либо вопросов следует обращаться к преподавателю в часы его консультаций. Критерием качества усвоения знаний могут служить аттестационные оценки по дисциплине и текущие оценки, выставяемые преподавателем в течение семестра.

При подготовке к контрольной работе по определенному разделу дисциплины полезно выписать отдельно все формулы, относящиеся к данному разделу, и все используемые в них обозначения. Также при подготовке к контрольной работе следует просмотреть конспект практических занятий и выделить в практические задания, относящиеся к данному разделу. Если задания на какие – то темы не были разобраны на занятиях (или решения которых оказались не понятыми), следует обратиться к учебной литературе, рекомендованной преподавателем в качестве источника сведений. Полезно при подготовке к контрольной работе самостоятельно решить несколько типичных заданий по соответствующему разделу. В каждом семестре предусматривается проведение одной контрольной работы.

В течение преподавания дисциплины «Алгебра и теория чисел» в качестве форм текущей аттестации студентов используются такие формы как, компьютерный тест (СЭО БГПУ).

Часть практических занятий проводится с использованием интерактивной методики обучения «Работа в малых группах». При организации групповой работы, следует обращать внимание на следующие ее аспекты. – нужно убедиться, что студенты обладают знаниями и умениями, необходимыми для выполнения группового задания. – инструкции к работе должны быть максимально четкими. – времени на выполнение задания должно быть достаточно. – необходимо контролировать распределение ролей в группе и участие каждого студента в работе.

4.5 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине:

1. Фонд оценочных средств.
2. Вопросы к экзамену.
3. Список литературы и информационных ресурсов.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

Наименование раздела (темы) дисциплины	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
Тема 1. Основные алгебраические структуры. Алгебры. Числовые поля. Комплексные числа	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	16
Тема 2. Матрицы и определители. Действия над матрицами	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	18
Тема 3. Векторные пространства. Общая теория систем линейных уравнений.	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	16
Итого за 1 семестр		50

Тема 4. Линейные операторы	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	8
Тема 5. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.		8
Тема 6. Многочлены от одной переменной над произвольным полем.	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	8
Тема 7. Многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел		10
Тема 8. Делимость и простые числа.	Подготовка к семинарам. Выполнение домашних работ	4
Тема 9. Арифметические функции.		4
Тема 10. Теория сравнений.		4
Итого за 2 семестр		46
Итого		96

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тематический план практических занятий 1 семестр

Тема занятия	Часы	Литература	Самостоятельная работа
Тема 1. Основные алгебраические структуры. Алгебры. Числовые поля. Комплексные числа 10 часов			
№1. Множество. Операции над множествами и их основные свойства. Диаграммы Эйлера-Венна. Бинарные отношения, их свойства. Полукольцо натуральных чисел. Метод математической индукции.	2	[1] Гл.14, §1	Решение текстовых задач
№2. Понятие алгебраической системы как множества с операциями и отношениями. Понятие группы. Простейшие свойства группы. Понятие кольца. Простейшие свойства колец. Поле, его простейшие свойства. Контрольная работа №1	2	[1] Гл.14, §1	Модулярная арифметика
№3. Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними. Тригонометрическая форма комплексного числа.	2	[1] Гл.4, §17-19	Геометрическое представление операций
№4. Корни из комплексных чисел и двучленные уравнения.	2	[1] Гл.4, §17-19	Корни из единицы. Первообразный корень

№5. Группа подстановок. Четность и знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.	2	[1] Гл.1, §3	Контрольная работа №1
Тема 2. Матрицы и определители. Действия над матрицами 12 часов			
№6. Методы вычисления определителей. Определитель Вандермонда. Определитель клеточно-треугольной матрицы.	2	[1] Гл.1, §6	Теорема Лапласа
№7. Необходимые и достаточные условия равенства нулю определителя. Определитель произведения матриц. Теорема о ранге матрицы.	2	[1] Гл.1, §6,10	Декремент подстановки
№8. Решение системы n-линейных уравнений с n переменными по методу Крамера.	2	[1] Гл.1, §7	
№9. Запись и решение системы n-линейных уравнений с n переменными в матричной форме.	2	[1] Гл.1, §7	
№10 Запись и решение системы n-линейных уравнений с n переменными через равносильные преобразования	2	[1] Гл.1, §7	
№11. Контрольная работа №2	2		
Тема 3. Векторные пространства. Общая теория систем линейных уравнений 10 часов			
№12. Понятие векторного пространства, примеры; арифметическое векторное пространство. Пространство линейной оболочки множества векторов	2	[1] Гл.2, §8,9	Свойства векторов в трехмерном пространстве
№13. Сумма и прямая сумма подпространств. Понятие линейного многообразия. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Эквивалентные системы векторов.	2	[1] Гл.7, §29,30	Примеры линейных многообразий
№14. Базис и ранг системы векторов. Координатная строка (столбец) вектора относительно данного базиса. Размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности. Системы линейных уравнений. Равносильные системы уравнений и	2	[1] Гл.7, §31,33	Переход к координатам вектора в другом базисе

элементарные преобразования системы.			
№15. Метод Гаусса (решение системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных). Векторная форма записи системы линейных уравнений. Условия совместности системы линейных уравнений. Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений	2	[1] Гл.2, §11	Метод Краута
№16. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Вычисление ранга матрицы.	2	[1] Гл.2, §12	Метод окаймляющих миноров
ВСЕГО:	32		

Тематический план практических занятий 2 семестр

Тема занятия	Часы	Литература	Самостоятельная работа
Тема 4. Линейные операторы. 6 часов			
№1. Линейные операторы (отображения) векторных пространств, примеры. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора.	2	[1] Гл.7, §31,33	Проверка оператора на линейность
№2. Связь между координатами вектора и его образа. Матрица перехода от базиса к базису.	2	[1] Гл.7, §32	Подобие матриц; связь между матрицами линейного оператора относительно различных базисов.
№3. Обратимые линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения. Характеристическое уравнение	2	[1] Гл.7, §31,33	Свободный член характеристического многочлена
Тема 5. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду 4 часа			
№9. Квадратичная форма как однородный многочлен второй степени. Диагональная квадратичная форма. Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Лагранжа. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Положительно определенные квадратичные формы	2	[1] Гл.6, §26	Поляризация

Тема 6. Многочлены от одной переменной над произвольным полем. Дробно-рациональные функции 4 часа			
№10. Кольцо многочленов от одной переменной. Теорема о делении с остатком. НОД двух многочленов. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Разложение многочлена по степеням двучлена. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни многочлена. Отделение кратных множителей многочлена	2	[1] Гл.10, §44	Алгебраическое и функциональное равенство многочленов
№11. Разложение многочлена над полем в произведение неприводимых множителей и его единственность. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел, разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей. Формулы Виета. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами	2	[1] Гл.12, §56	Схема Яковкина
Тема 7. Многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел 6 часов			
№12. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Метод Штурма	2	[1] Гл.9, §40	Критерий неприводимости Эйзенштейна
Тема 8. Делимость и простые числа 4 часа			
№13. Теорема о делении с остатком для целых чисел. Определение евклидова кольца. Идеалы евклидова кольца. Отношение делимости и его свойства	2	[2] Гл.3, §1	Ассоциированные элементы
№14. Наибольший общий делитель и его линейное представление. Алгоритм Евклида. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Каноническое разложение	2	[2] Гл.3, §2	Факторкольцо по идеалу, порожденному простым элементом.
Тема 9. Арифметические функции 4 часа			
№15. Целая и дробная части числа. Расстояние до ближайшего целого. Сумма делителей $\sigma(n)$ и число делителей $\tau(n)$. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Мультипликативность и явные формулы.	2	[2] Гл.3, §3	Применение в криптографии
Тема 10. Теория сравнений 6 часов			
№16. Сравнения и кольца вычетов. Обратимые классы. Полная и приведенная системы вычетов	2	[2] Гл.3, §4	Свойство полной системы вычетов

№17. Теоретико-числовая функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма. Линейное уравнение в кольце вычетов	2	[2] Гл.3, §5	Число делителей числа
№18. Системы сравнений	2	[2] Гл.3, §5	Китайская теорема об остатках
ВСЕГО:	34		

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ОПК-1, ПК-1	Собеседование	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе
		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.
ОПК-1, ПК-1	Контрольная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Ответ студенту не зачитывается если: - Задание выполнено менее, чем на половину; - Студент обнаруживает незнание большей части соответствующего материала, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно излагает материал.
		Пороговый (удовлетворительно)	Задание выполнено более, чем на половину. Студент обнаруживает знание и понимание основных положений задания, но: - Излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий; - Не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

			• Излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
		Базовый (хорошо)	Задание в основном выполнено. Ответы правильные, но: • В ответе допущены малозначительные ошибки и недостаточно полно раскрыто содержание вопроса; • Не приведены иллюстрирующие примеры, недостаточно чётко выражено обобщающее мнение студента; • Допущено 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
		Высокий (отлично)	Задание выполнено в максимальном объеме. Ответы полные и правильные. • Студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий; • Обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры; • Излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт, экзамен.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на практическом занятии, семинаре

Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях.

Критерии оценивания:

- 1) полноту и правильность ответа;
- 2) степень осознанности, понимания изученного;
- 3) языковое оформление ответа.

Оценка «отлично» ставится, если:

- 1) студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

«хорошо» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

«удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Критерии оценивания контрольных работ

Оценка «отлично» ставится, если студент:

1. выполнил работу без ошибок и недочетов;
2. допустил не более одного недочета.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней:

1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета;
2. или не более двух недочетов.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил:

1. не более двух грубых ошибок;
2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;
3. или не более двух-трех негрубых ошибок;
4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов;
5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент:

1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»;
2. или если правильно выполнил менее половины работы.

Критерии оценивания на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- задания, размещенные в Электронной информационно-образовательной среде БГПУ выполнены на 60 и более процентов;

- он имеет посещаемость лабораторных занятий не менее 60 процентов.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- задания, размещенные в Электронной информационно-образовательной среде БГПУ выполнены менее чем на 60 процентов;

- он имеет посещаемость лабораторных занятий менее 60 процентов (исключение составляют студенты, пропустившие занятия по уважительной причине: болезни, участия в значимых для вуза мероприятиях, таких как участие в олимпиадах по профилю и т.п.).

Критерии оценивания на экзамене

Студент допускается на экзамен при условии

- размещения в Электронной информационно-образовательной среде БГПУ проверенных контрольных работ.
 - Прошел пробный тест
1. Экзаменационная оценка «отлично» выставляется, если студент:
 - выполнил задания экзаменационного теста на минимум 90%
 2. Экзаменационная оценка «хорошо» выставляется, если студент
 - выполнил задания экзаменационного теста от 75% до 89%
 3. Экзаменационная оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент
 - выполнил задания экзаменационного теста от 60% до 74 90%
 4. Экзаменационная оценка «неудовлетворительно» выставляется, если:
 - выполнил задания экзаменационного теста менее 60%

6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенций ОПК-1, ПК-1

Тесты содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10, 11	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания открытого типа с кратким ответом	12, 13	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла;

			если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов
--	--	--	--

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	- ОПК-1.1 – обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук; - ОПК-1.2 – умеет использовать их в профессиональной деятельности; - ОПК-1.3 – имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

Задание 1

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

Какое из следующих утверждений о поле комплексных чисел неверно?

- 1) Множество комплексных чисел замкнуто относительно сложения
- 2) Множество комплексных чисел замкнуто относительно умножения
- 3) Комплексные числа можно сравнивать
- 4) Каждое ненулевое комплексное число имеет обратное относительно умножения

Ответ: 3

Задание 2

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

Подходящая дробь для цепной дроби $[2;1,3]$ равна:

- 1) $\frac{10}{3}$
- 2) $\frac{11}{4}$
- 3) $\frac{9}{4}$
- 4) $\frac{7}{3}$

Ответ: 2

Задание 3

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

Между какими из следующих пар групп **не существует** изоморфизма?

- 1) $(\mathbb{Z}_4, +)$ и мультипликативная группа корней 4-й степени из 1
- 2) $(S_3, \circ)$ и $(\mathbb{Z}_6, +)$
- 3) Группа поворотов квадрата и $(\mathbb{Z}_4, +)$
- 4) Группа матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ относительно умножения и $(\mathbb{R}, +)$

Ответ: 2

Задание 4

Верно ли следующее утверждение?

Любой гомоморфизм групп является изоморфизмом.

Ответ: не верно

Задание 5

Верно ли следующее утверждение?

Множество всех многочленов степени не выше n образует векторное пространство.

Ответ: верно

Задание 6

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:

В какой алгебраической структуре для каждого ненулевого элемента существует обратный элемент относительно умножения?

- 1) Группа
- 2) Кольцо
- 3) Поле
- 4) Целостное кольцо
- 5) Тело
- 6) Полугруппа

Ответ: 1, 3, 5

Задание 7

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:

Если матрица A имеет определитель 5, то определитель матрицы $2A$ равен:

- 1) 10
- 2) $2^n \cdot 5$, где n - порядок матрицы
- 3) 5
- 4) 25
- 5) $8 \cdot 5$ для матрицы 3-го порядка
- 6) $2 \cdot 5$ для матрицы 1-го порядка

Ответ: 2, 5, 6

Задание 8

Установите соответствие между арифметическими функциями и их определениями или ключевыми свойствами:

Функция Эйлера $\varphi(n)$: количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n

Функция делителей $\tau(n)$: Количество натуральных делителей числа n

Функция суммы делителей $\sigma(n)$: Сумма всех натуральных делителей числа n

Функция Мёбиуса $\mu(n)$: Равна $(-1)^k$, если n — произведение k различных простых чисел, и 0 в противном случае

Задание 9

Установите соответствие между понятиями и их определениями:

Простое число : Натуральное число, имеющее ровно два делителя

Взаимно простые числа : Числа, НОД которых равен 1

Сравнение по модулю : Отношение эквивалентности на множестве целых чисел

Функция Эйлера : Количество чисел, взаимно простых с данным числом

Задание 10

Расположите в правильном порядке шаги решения уравнения $ax=b$ в поле

- 1 : Записать уравнение $ax=b$
- 2 : Найти обратный элемент к a в поле
- 3 : Умножить обе части уравнения на обратный элемент к a
- 4 : Получить решение $x=a^{-1}b$

Задание 11

Расположите следующие понятия в порядке увеличения общности (от частного к общему):

- 1 : Абелева группа
- 2 : Группа
- 3 : Моноид
- 4 : Полугруппа

Задание 12

Критерием неприводимости квадратного трехчлена над полем действительных чисел является...

Ответ: отрицательный дискриминант

Задание 13

Многочлен $x^3 - 3x + 2$ имеет корень $x = 1$. Какова кратность этого корня?

Ответ: 2

Задание 14

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Найдите размерность линейной оболочки векторов $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 6, 9)$ в $\mathbb{R}^3$.

Ответ: 1

Решение:

Все векторы пропорциональны первому вектору $(1, 2, 3)$, значит, они линейно зависимы. Линейная оболочка порождается одним вектором, поэтому ее размерность равна 1.

Задание 15

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Докажите, что множество всех многочленов степени не выше 2 образует векторное пространство над полем действительных чисел.

Ответ: множество образует векторное пространство

Решение:

- 1) Множество замкнуто относительно сложения: сумма двух многочленов степени ≤ 2 дает многочлен степени ≤ 2
- 2) Множество замкнуто относительно умножения на скаляр: произведение многочлена на число дает многочлен степени ≤ 2
- 3) Выполняются все аксиомы векторного пространства: ассоциативность, коммутативность сложения, существование нулевого элемента, противоположного элемента, дистрибутивность и ассоциативность умножения на скаляр

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ПК-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	ПК-1.1 – обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

Задание 1

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

Какое из перечисленных свойств является характеристикой поля?

1. Существование обратного элемента для каждого ненулевого элемента относительно умножения
2. Коммутативность умножения
3. Отсутствие делителей нуля
4. Все перечисленные

Ответ: 4

Задание 2

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

При изучении колец студент исследует множество $M_2(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц 2×2 . Какое утверждение о этом множестве верно?

- 1) Это поле
- 2) Это коммутативное кольцо
- 3) Это кольцо с делителями нуля
- 4) Каждый ненулевой элемент обратим

Ответ: 3

Задание 3

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:

При вычислении определителя матрицы третьего порядка студент применил разложение по первой строке. Какое действие является ошибочным в его вычислениях?

- 1) Умножение каждого элемента строки на его алгебраическое дополнение
- 2) Суммирование полученных произведений
- 3) Вычисление миноров как определителей матриц 2×2
- 4) Умножение элементов на миноры без учёта знаков

Ответ: 4

Задание 4

Верно ли следующее утверждение для исследования структуры групп?

"Любая подгруппа циклической группы является нормальной"

Ответ: верно

Задание 5

Верно ли следующее утверждение при анализе колец?

"Характеристика поля может быть любым натуральным числом"

Ответ: не верно

Задание 6

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:

При системном исследовании алгебраических структур выявлены следующие свойства:

- 1) Существование обратного элемента для каждой операции
- 2) Дистрибутивность умножения относительно сложения
- 3) Коммутативность сложения
- 4) Ассоциативность умножения
- 5) Существование делителей нуля
- 6) Существование нейтрального элемента относительно операции сложения

Какие из этих свойств обязательно выполняются для всех полей?

Ответ: 2, 3, 4

Задание 7

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:

При анализе разложений многочленов над разными полями получены следующие результаты:

- 1) $x^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{R}$
- 2) $x^3 - 2$ неприводим над $\mathbb{Q}$
- 3) $x^2 - 2$ неприводим над $\mathbb{R}$
- 4) $x^4 - 16$ неприводим над $\mathbb{Q}$
- 5) $x^2 + 3x + 4$ неприводим над $\mathbb{C}$
- 6) $(x+1)(x+\sqrt{2})$ приводим над $\mathbb{Q}$

Какие утверждения верны?

Ответ: 1, 2, 4

Задание 8

Установите соответствие между понятием и его определением:

НОД(a, b) : Наибольшее натуральное число, делящее и a , и b

Сравнение по модулю : Отношение эквивалентности на множестве целых чисел, заданное остатками от деления на m

Кольцо вычетов : Множество классов вычетов по модулю m с операциями сложения и умножения

Примитивный корень по модулю : Число, степени которого пробегает все ненулевые вычеты по модулю

Задание 9

Установите соответствие между теоремой и её формулировкой:

Теорема Эйлера : $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ для взаимно простых a и m

Китайская теорема об остатках : Система сравнений с попарно взаимно простыми модулями имеет единственное решение по модулю произведения

Теорема Лагранжа : Порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы

Основная теорема арифметики : Каждое натуральное число >1 единственным образом разлагается в произведение простых

Задание 10

Расположите в правильном порядке этапы исследования при решении системы линейных уравнений:

- 1 : Анализ совместности системы
- 2 : Определение ранга матрицы системы
- 3 : Выбор метода решения
- 4 : Интерпретация результатов
- 5 : Проверка решения

Задание 11

Расположите в порядке увеличения общности следующие алгебраические структуры:

- 1 : Поле
- 2 : Коммутативное кольцо
- 3 : Кольцо
- 4 : Абелева группа

Задание 12

При исследовании квадратных уравнений над полем $\mathbb{C}$ ключевым параметром, определяющим количество различных корней, является...

Ответ: дискриминант

Задание 13

Минимальное число образующих для мультипликативной группы поля $\mathbb{Z}_{17}$ равно...

Ответ: 1

Задание 14

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Покажите, как можно использовать китайскую теорему об остатках для решения системы сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Найдите общее решение.

Ответ:

Решение:

Модули 3, 5, 7 попарно взаимно просты.

$$1. M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$2. M_1 = 35, \quad M_2 = 21, \quad M_3 = 15$$

3. Находим обратные:

$$35^{-1} \pmod{3} \equiv 2^{-1} \pmod{3} = 2 \text{ (так как } 2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \pmod{3})$$

$$21^{-1} \pmod{5} \equiv 1^{-1} \pmod{5} = 1$$

$$15^{-1} \pmod{7} \equiv 1^{-1} \pmod{7} = 1$$

$$4. x = (2 \cdot 35 \cdot 2) + (3 \cdot 21 \cdot 1) + (2 \cdot 15 \cdot 1) = 140 + 63 + 30 = 233$$

$$5. 233 \pmod{105} = 23$$

Ответ: $x \equiv 23 \pmod{105}$

Задание 15

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Исследуйте определитель матрицы, зависящей от параметра. Найдите все значения параметра a , при которых матрица является вырожденной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $a=3$

Решение:

1. Матрица является вырожденной, когда её определитель равен нулю:
2. Вычислим определитель, разложив по второй строке или используя правило Саррюса. Используем разложение по второй строке:

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + a \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 2 + a \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 4 - 4a + 8 = 12 - 4a$$

3. Приравняем к нулю

$$12 - 4a = 0$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

1. Методом математической индукции доказать.
2. Доказать, что:
3. Вычислить
4. Решить уравнение третьей степени по формулам Кардано.

Вариант N 1		Вариант N 2	
1	$1+2+3+\dots+n=1/2(n+1)n$	1	$2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$
2	$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{(n+1)n}{2(2n+1)}$	2	$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, где n четное число
3	$\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$	3	$\sqrt[6]{\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}}$
4	$x^3 - 6\sqrt[3]{4}x + 12i = 0$	4	$x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$

Вариант N 3		Вариант N 4	
1	$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$	1	$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = 1/4n^2(n+1)^2$
2	$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$	2	$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
3	$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$	3	$\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$
4	$x^3 - 3x^2 + 27x - 81 = 0$	4	$x^3 - 6\sqrt[3]{2} \cdot x - 6i = 0$

Вариант N 5	Вариант N 6
-------------	-------------

1	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}$	1	$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
2	$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}$	2	$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - \dots - 10^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = 81^n$
3	$\sqrt[6]{\frac{-27}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$	3	$\sqrt[8]{\frac{i}{1-i\sqrt{3}}}$
4	$x^3 + 3x^2 + 48x - 52 = 0$	4	$8x^3 - 12x^2 + 150x - 225 = 0$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Решить систему линейных уравнений тремя способами:

1) Метод Крамера. 2) Матричный метод; 3) Метод Гаусса;

1.	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
	123		1-23
3.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$
	32-1		2-13
5.	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -11 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 15 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$
	32-1		4-21

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Вариант1	Вариант2	Вариант3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Вариант4 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант5 $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	Вариант6 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ -
Вариант7 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант8 $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	Вариант9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду

Вариант1

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

Вариант2

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

Вариант3

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 7x_3^2$$

Вариант4

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$$

Вариант5

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Вариант 1	Вариант 2
$res(14^{86}, 9)$ $34x \equiv 22 \pmod{96}$ цепными дробями $\frac{563}{129}$ подходящие дроби	$res(15^{36}, 8)$ $22x \equiv 26 \pmod{90}$ цепными дробями $\frac{761}{212}$ подходящие дроби
Вариант 3	Вариант 4
$res(14^{26}, 15)$ $12x \equiv 14 \pmod{118}$ цепными дробями $\frac{813}{311}$ подходящие дроби	$res(15^{26}, 18)$ $34x \equiv 26 \pmod{46}$ цепными дробями $\frac{981}{514}$ подходящие дроби

Вариант 5	Вариант 6
$\text{res}(14^{26}, 21)$ $16x \equiv 54 \pmod{58}$ цепными дробями $\frac{654}{97}$ подходящие дроби	$\text{res}(17^{31}, 20)$ $34x \equiv 30 \pmod{78}$ цепными дробями $\frac{431}{102}$ подходящие дроби
Вариант 7	Вариант 8
$\text{res}(13^{26}, 28)$ $18x \equiv 54 \pmod{106}$ цепными дробями $\frac{533}{118}$ подходящие дроби	$\text{res}(25^{33}, 36)$ $54x \equiv 36 \pmod{74}$ цепными дробями $\frac{477}{214}$ подходящие дроби
Вариант 9	Вариант 10
$\text{res}(17^{41}, 26)$ $58x \equiv 50 \pmod{68}$ цепными дробями $\frac{549}{176}$ подходящие дроби	$\text{res}(17^{34}, 24)$ $22x \equiv 16 \pmod{94}$ цепными дробями $\frac{749}{172}$ подходящие дроби

**Программа экзамена
Экзамен (1 семестр)**

1. Множества. Способы задания. Включение множеств. Равенство множеств.
2. Операции над множествами, их основные свойства.
3. Упорядоченные пары. Прямое произведение множеств. Декартов квадрат.
4. Бинарные отношения, заданные на множестве. Определение. Способы задания бинарных отношений. Свойства. Примеры.
5. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы. Примеры.
6. Бинарные алгебраические операции, заданные на множестве. Свойства. Примеры.
7. Алгебраические системы. Алгебры. Gruppoиды, полугруппы, моноиды. Примеры.
8. Группы, их виды. Свойства групп.
9. Кольцо. Свойства колец.
10. Поле. Определение, примеры полей.
11. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
12. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме (с выводом).
13. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
14. Формула Муавра. Извлечение корня n -ой степени из любого комплексного числа.
15. Корни n -ой степени из единицы. Свойства корней.
16. Решение кубических уравнений (вывод формул Кардано).
17. Матрицы. Действия над матрицами, их свойства.
18. Обратная матрица. Линейная независимость строк обратимой матрицы (теорема).
19. Невырожденная матрица. Теорема, дающая способ вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

20. Подстановки n -ой степени. Группа подстановок.
21. Разложение подстановок в произведение циклов. Четность и знак подстановки.
22. Определитель n -го порядка. Определители 2-го и 3-го порядков.
23. Свойства определителей.
24. Миноры и алгебраические дополнения элемента квадратной матрицы.
25. Теорема Безу. Теорема Вандермонда.
26. Определение и свойства векторного пространства. Примеры.
27. Базис и размерность векторного пространства.
28. Линейная зависимость системы векторов. Свойства линейной зависимости.
29. Линейная независимость системы векторов. Свойства линейной независимости.
30. Эквивалентные системы векторов. Основная теорема о линейной зависимости. Следствие.
31. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Основные понятия и определения. Форма записи.
32. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).
33. Линейное многообразие решений системы линейных неоднородных уравнений.
34. Пространство решений системы линейных неоднородных уравнений. Построение Ф.С.Р.
35. Строчечный и столбцовый ранги матрицы. Элементарные преобразования матрицы.
36. Трапециевидная матрица. Ранг трапециевидной матрицы.
37. Теорема Кронекера-Капелли. Следствия.
38. Изоморфизм векторных пространств.
39. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймления.
40. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.
41. Вывод формул Крамера.
42. Формула обратной матрицы.
43. Векторные пространства со скалярным умножением.
44. Матрица перехода от одного базиса к другому.
45. Ортогональные векторы. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов.
46. Ортогональный базис пространства. Теорема о том, что любой базис может стать ортогональным.
47. Нормированный вектор. Ортонормированный базис. Необходимое и достаточное условие ортонормированности базиса.
48. Процесс ортогонализации.
49. Ортогональное дополнение подпространства.
50. Изоморфизм евклидовых пространств.

Программа зачета (2 семестр)

1. Квадратичная форма как однородный многочлен второй степени.
2. Диагональная квадратичная форма.
3. Приведение квадратичной формы к диагональному виду методом Лагранжа.
4. Закон инерции вещественных квадратичных форм.
5. Положительно определенные квадратичные формы.
6. Многочлены от одной переменной над областью целостности.
7. Действия над многочленами из $K[x]$. Делимость многочлена над кольцом, свойства делимости.
8. Теорема Безу, ее применения.
9. Вывод схемы Горнера. Применения схемы Горнера.
10. Разложение многочлена $f(x)$ из $K[x]$ по степеням $x-a$.
11. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида для его нахождения.

12. Линейное представление НОД двух многочленов, его применение.
13. Взаимно простые многочлены и их свойства.
14. НОК двух многочленов и его связь с НОД этих многочленов.
15. Приводимость многочленов с целыми коэффициентами над кольцом целых чисел.
16. Многочлены над полем. Делимость многочленов над полем, особые свойства.
17. Приводимые и неприводимые многочлены над данным полем. Свойства неприводимых многочленов.
18. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность.
19. Неприводимые кратные множители (теорема).
20. Теорема о нахождении НОД многочлена $f(x)$ и его производной. Кратные корни.
21. Выделение кратных множителей.
22. Многочлены от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение многочлена.
23. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Степенные суммы.
24. Основная теорема о симметрических многочленах.
25. Высший член многочлена. Лемма о высшем члене произведения симметрических многочленов.
26. Многочлены над полем комплексных чисел. Лемма Даламбера.
27. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
28. Теорема о существовании корня.
29. Следствия из теоремы о существовании корня, применения этих следствий.
30. Многочлены с действительными коэффициентами. Теорема о многочленах с сопряженными значениями переменных.
31. Сопряженность корней многочлена из $R[x]$.
32. Разложение многочлена над полем R в произведение неприводимых множителей (теорема). Следствия.
33. Рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами. Целые корни.
34. Отношение делимости в кольце Z . Свойства делимости.
35. Обращение обыкновенных дробей в бесконечные десятичные дроби.
36. Деление с остатком. Теорема о делении с остатком.
37. Системы линейных сравнений.
38. НОД чисел. Алгоритм Евклида для его нахождения. НОК чисел. Свойства НОК двух чисел.
39. Решение сравнений первой степени.
40. Простые числа и их свойства.
41. Сравнения первой степени. Критерии разрешимости.
42. Основная теорема арифметики. Каноническое представление натурального числа и его практическое нахождение.
43. Применение теории сравнений к выводу признаков делимости.
44. Числовые функции. Сумма делителей $\sigma(n)$ и число делителей $\tau(n)$.
45. Теоремы Эйлера и Ферма.
46. Конечные цепные дроби. Представление рационального числа в виде КЦД
47. Полная и приведенная системы вычетов. Функция Эйлера $\varphi(n)$.
48. Подходящие дроби. Свойства подходящих дробей.
49. Классы вычетов по данному модулю. Кольцо классов вычетов.
50. Сравнения в кольце целых чисел. Свойства сравнений.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- официальный сайт БГПУ;
- корпоративная сеть БГПУ;
- система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- электронные библиотечные системы;
- мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для студ. вузов / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с. (13 экз.)
2. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. [Текст] : [учеб. пособие для вузов]. Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2007. – 303 с. (30 экз.)
3. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студ.вузов, обучающихся по математическим спец. / Д.К. Фаддеев. – СПб.: Лань, 2005. – 287 с. (10 экз.)
4. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 382 с. (51 экз.)
5. Куликов, Л. Я.Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. – М. : Просвещение, 1993. – 287 с. (30 экз.)
6. Вечтомов, Е. М. Математика: основные математические структуры : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. М. Вечтомов. – 2-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 291 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-08078-0. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/494403>
7. Журавлев, Ю. И. Дискретный анализ. Основы высшей алгебры : учебное пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, М. Н. Вялый. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 223 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-06277-9. –

Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/491080>

8. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 160 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05567-2. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/493272>

9. Ларин, С. В. Алгебра: многочлены : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 136 с. – (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07825-1. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/493274>

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

10. Федеральный портал «Российское образование» – Режим доступа: <http://www.edu.ru>

11. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – Режим доступа: <http://www.window.edu.ru>

12. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – Режим доступа: <http://fcior.edu.ru>

13. Сайт Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам (Роспатента). – Режим доступа: <http://www.fips.ru/rospatent/index.htm>

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». – Режим доступа: <https://urait.ru>

2. Полпред (обзор СМИ). – Режим доступа: <https://polpred.com/news>

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской в том числе интерактивной, компьютером(рами) с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутатором для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду ФГБОУ ВО «БГПУ», мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (стенды, таблицы, мультимедийные презентации, видео материалы). Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ, в лаборатории психолого-педагогических исследований и др.

Разработчик: Алутин П.П., кандидат физико-математических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2024/2025 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «24» мая 2024 г.).

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2025/2026 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2026/2027 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026/2027 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «26» мая 2026 г.).