	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ СРЕДНЕГО ЗВЕНА Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана физико-математического факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»
________Т.А. Меределина
«29» декабря 2021 г

Рабочая программа учебной дисциплины

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Программа подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация выпускника
Программист

Принята на заседании кафедры
физического и математического образования
(протокол № 8 от «21» апреля 2021 г.)

Благовещенск 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: формирование знаний в области математического анализа, алгебры и геометрии, их месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках. Изучение предмета дает возможность получить базовую фундаментальную подготовку по избранной специальности.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП

Учебная дисциплина «Элементы высшей математики» принадлежит к математическому и общему естественнонаучному учебному циклу (ЕН.01).

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

- ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;
- ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения

В результате изучения дисциплины обучающийся должен

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Элементы высшей математики» составляет 182 ч. максимальной учебной нагрузки обучающегося, в том числе: обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося – 144 часа; самостоятельной работы обучающегося – 30 часов.

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических. Предусмотрена самостоятельная работа обучающихся по темам и разделам. Программа предусматривает использование в образовательном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Вид учебной работы	**Объем часов**
Максимальная учебная нагрузка (всего)	**182**
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	**144**
в том числе:	
- лекции	84
- практические занятия	60
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	**30**
Консультации	2
Промежуточная аттестация: дифференцированный зачет, экзамен	6

2 ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся	Объем в часах
Тема 1. Основы теории комплексных чисел	**Содержание учебного материала**	8
	1. Определение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел.	
	В том числе практических занятий	4
	Самостоятельная работа обучающихся	2
Тема 2. Теория пределов	**Содержание учебного материала**	14
	1.Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов	
	2. Замечательные пределы, раскрытие неопределенностей	
	3. Односторонние пределы, классификация точек разрыва	
	В том числе практических занятий	4
	Самостоятельная работа обучающихся	2
Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной	**Содержание учебного материала**	14
	1.Определение производной	
	2. Производные и дифференциалы высших порядков	
	3. Полное исследование функции. Построение графиков	
	В том числе практических занятий	4
	Самостоятельная работа обучающихся	2
Тема 4. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	**Содержание учебного материала**	14
	1. Неопределенный и определенный интеграл и его свойства	
	2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования	
	3. Вычисление определенных интегралов. Применение определенных интегралов	
	В том числе практических занятий	4
	Самостоятельная работа обучающихся	2
Тема 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных	**Содержание учебного материала**	14
	1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных	
	2. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных	
	3. Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков	
	В том числе практических занятий	4
	Самостоятельная работа обучающихся	2
Тема 6. Интегральное исчисление функции нескольких действительных пе-	**Содержание учебного материала**	14
	1. Двойные интегралы и их свойства	
	2. Повторные интегралы	
	3. Приложение двойных интегралов	
	В том числе практических занятий	6

ременных	**Самостоятельная работа обучающихся**	**4**
Тема 7. Теория рядов	**Содержание учебного материала**	**14**
	1. Определение числового ряда. Свойства рядов	
	2. Функциональные последовательности и ряды	
	3. Исследование сходимости рядов	
	В том числе практических занятий	**4**
	Самостоятельная работа обучающихся	**2**
Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**Содержание учебного материала**	**14**
	1. Общее и частное решение дифференциальных уравнений	
	2. Дифференциальные уравнения 2-го порядка	
	3. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка	
	В том числе практических занятий	**4**
	Самостоятельная работа обучающихся	**2**
Тема 9. Матрицы и определители	**Содержание учебного материала**	**14**
	1. Понятие Матрицы	
	2. Действия над матрицами	
	3. Определитель матрицы	
	4. Обратная матрица. Ранг матрицы	
	В том числе практических занятий	**6**
	Самостоятельная работа обучающихся	**2**
Тема 10. Системы линейных уравнений	**Содержание учебного материала**	**14**
	1. Основные понятия системы линейных уравнений	
	2. Правило решения произвольной системы линейных уравнений	
	3. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса	
	В том числе практических занятий	**6**
	Самостоятельная работа обучающихся	**2**
Тема 11. Векторы и действия с ними	**Содержание учебного материала**	**16**
	1. Определение вектора. Операции над векторами, их свойства	
	2. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов	
	3. Приложения скалярного, смешанного, векторного произведения векторов	
	В том числе практических занятий	**6**
	Самостоятельная работа обучающихся	**4**
Тема 12. Аналитическая геометрия на плоскости	**Содержание учебного материала**	**20**
	1. Уравнение прямой на плоскости	
	2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой	
	3. Линии второго порядка на плоскости	
	4. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости	
	В том числе практических занятий	**8**
	Самостоятельная работа обучающихся	**4**
Примерный перечень практических работ: • Решение задач по линейной алгебре. • Решение задач по аналитической геометрии. • Решение дифференциальных уравнений.		

• Интегральное исчисление, решения интегралов, вычисление интегралов. • Решение задач с комплексными числами.	
Консультации	**2**
Промежуточная аттестация: дифференцированный зачет, экзамен	**2+4**
Всего	**182**

3 УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1 Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация учебной дисциплины требует наличия учебного кабинета математики – учебная аудитория для проведения всех видов учебных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной аттестации и самостоятельной работы.

Комплект учебной мебели, аудиторная доска, компьютер с установленным лицензионным программным обеспечением, мультимедийный проектор, экспозиционный экран.

Используемое программное обеспечение: Microsoft®WINEDUperDVC AllLng Upgrade/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Microsoft®OfficeProPlusEducation AllLng License/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Dr.Web Security Suite; Java Runtime Environment; Calculate Linux.

3.2 Информационное обеспечение обучения

Основная литература

1. Баврин, И. И. Математический анализ : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 327 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-6247-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/482659

2. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471507

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу/ Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель. – 2006. – 558 с. (28 экз.)

4. Кашапова, Ф. Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебное пособие для среднего профессионального образования / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 128 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11363-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/473219

5. Пахомова, Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 110 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08432-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470618

6. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с. (16 экз.)

7. Потапов, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 310 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01061-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471460

8. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия : учебник для среднего профессионального образования / И. И. Привалов. — 40-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 233 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-8774-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471392

9. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 258 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08942-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/474730

10. Садовничая, И. В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко ; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 115 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08474-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/473241

11. Хорошилова, Е. В. Математический анализ: неопределенный интеграл : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 187 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-06949-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/473201

12. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 212 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04547-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471974

Дополнительная литература

1. Бохан, К.А. Курс математического анализа / К.А. Бохан, И.А. Егорова, К.В. Лащенов. – М.: Просвещение, 1972, т. 1, 436 с.

2. Виленкин, Н.Я. Математический анализ / Н.Я. Виленкин, М.Б. Балк, В.А. Петров. – М.: Просвещение, 1980.

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. В 2 ч. Ч. 1 учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – 2-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 396 с.

4. Атанасян, Л.С. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2-х ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 2008. – Ч.2. –352 с.

5. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: уч. пособие для втузов / Д.В. Клетеник. – 17-е изд. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2007. – 200 с.

6. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2008. – 415 с.

7. Ивашев-Мусатов, О. Математический анализ? Это очень просто! / О. Ивашев-Мусатов. – М.: Чистые пруды, 2006. – 31 с.

8. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс/ К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2004. – 576 с.

9. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст]: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. - 3-е изд., стер. - Минск: Тетра Системс, 2003. - 287 с.

10. Куликов ,Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. - М.: Просвещение, 1993. - 287 с.

11. Ляпин, Е.С. Алгебра и теория чисел. / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев М., Просвещение, 1974.

12. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. —

Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/491294

13. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/491295

14. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу: учеб. для студ. вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Дрофа, 2003. - 638, [1] с. (8 экз.)

15. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит. – Т.3: Интегралы, ряды. – 2003. – 502 с.

Базы данных и информационно-справочные системы

1. Открытый колледж. Математика. - Режим доступа: https://mathematics.ru
2. Математические этюды. - Режим доступа: http://www.etudes.ru
3. Федеральный портал «Российское образование». - Режим доступа: http://www.edu.ru
4. Портал Электронная библиотека: диссертации. - Режим доступа: http://diss.rsl.ru/?menu
5. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
6. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки. - Режим доступа: http://www.obrnadzor.gov.ru/ru
7. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: https://edu.gov.ru
8. Сайт Министерства науки и высшего образования РФ. - Режим доступа: https://minobrnauki.gov.ru/

Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: https://polpred.com/news

4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения учебной дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения лекционных занятий, практических занятий, а также выполнения обучающимися контрольных работ.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Формы и методы контроля результатов обучения
Умения: – Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений – Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости – Применять методы дифференциального и интегрального исчисления – Решать дифференциальные уравнения – Пользоваться понятиями теории комплексных чисел **Знания**:	Контрольная работа Интерпретация результатов наблюдений за деятельностью обучающегося в процессе выполнения практических работ Оценка выполнения контрольных работ

– Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии – Основы дифференциального и интегрального исчисления – Основы теории комплексных чисел	

5 ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Формируемая компетенция	Показатели освоения компетенций
ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам	**уметь**: • выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений; • решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости; • применять методы дифференциального и интегрального исчисления; • решать дифференциальные уравнения; • пользоваться понятиями теории комплексных чисел; **знать**: • основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии; • основы дифференциального и интегрального исчисления; • основы теории комплексных чисел.

Задание 1. У какой из кривых второго порядка не одна директриса?
a) Эллипс
b) Парабола
c) Гипербола
Ответ: a), c)

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = (2;-3;1), \vec{b} = (1;1;4)$. Найти квадрат площади параллелограмма, построенного на этих векторах
Ответ: 243

Задание 3. Произведение матриц вычисляется следующим образом: Каждый элемент ______________ первой матрицы умножается на соответствующий по порядку элемент ______________ второй матрицы и их сумма записывается в элемент, первый индекс которого равен номеру строки первой матрицы, а второй индекс – номеру столбца второй матрицы
Ответ: каждой строки   каждого столбца

Задание 4. Векторы являются не коллинеарными, если
a) Они расположены на одной или параллельных прямых
b) Они служат диагоналями параллелограмма
c) Они перпендикулярны
Ответ: b), c)

Задание 5. **Установите соответствие.**

1. Аргумент комплексного числа	a) расстояние от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексное число
2. Модуль комплексного числа	b) мнимая единица
	c) угол, который радиус-вектор от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексное число, образует с осью *Ox*

Запишите в ответ, расположив их в порядке, соответствующем цифрам:

1	2

Ответ:

1	2
c	a

Задание 6. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $1-i$.

Решение. Модуль данного числа $r=|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вращая воображаемый циркуль по координатной плоскости поворачиваем циркуль на π, затем на $\frac{\pi}{2}$ и на $\frac{\pi}{4}$, получаем $\varphi=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$. Тогда тригонометрическая форма данного комплексного числа:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Ответ: $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найден модуль- 0,5 балла

Задание 7. Чему равна $\left(\frac{1}{x^3}\right)'$?

a) $\frac{9}{x^3}$

b) $-\frac{3}{x^4}$

c) $-3x^{-4}$

Ответ: b) $-\frac{3}{x^4}$, c) $-3x^{-4}$

Задание 8. Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то их производные ________________

Ответ: равны

Задание 9. Чему равна $(\sin^2 x)'$?

a) $2\cos x \cdot \sin x$

b) $\cos 2x$

c) $\cos^2 x$

d) $\sin 2x$

Ответ: a) $\sin 2x$, d) $2\cos x \cdot \sin x$

Задание 10. Составить уравнение нормали к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$, если абсцисса точки касания $x_0 = -1$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$y_0 = y(-1) = 1 + 5 + 4 = 10$.

Найдём производную функции:

$f'(x) = y' = 2x - 5$.

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$f'(x_0) = y'(-1) = -2 - 5 = -7$.

Составляем уравнение нормали:

$x + 1 - 7(y - 10) = 0$

$x + 1 - 7y + 70 = 0$

$x - 7y + 71 = 0.$

Ответ: $x - 7y + 71 = 0.$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено значение производной- 0,5 балла

Задание 11. Точки экстремума функции двух переменных – это точки, в которых первые частные производные равны нулю или ____________

Ответ: не существуют

Задание 12. Что из ниже приведённого относится к вычислению двойного интеграла?

a) менять местами переменные

b) вычислять определитель

c) сводить к повторному интегралу
d) считать одну из переменных константой

Ответ: a) менять местами переменные, c) сводить к повторному интегралу, d) считать одну из переменных константой

Задание 13. *L* - кривая, по отрезку *AB* которой происходит интегрирование. Криволинейный интеграл равен длине дуги *AB*, если подынтегральная функция равна___________
Ответ: единице

Задание 14. Первым шагом решения уравнения $xy'+y=\ln x+1$ является почленное деление уравнения на _______________

Ответ: x

Задание 15. Согласно признака Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{2n}}$ ________________.

Ответ: расходится

Задание 16. Найти неопределённый интеграл
$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$.
Решение. Представим числитель подынтегральной функции, равный 1, в виде
$\sin^2 x+\cos^2 x$.
Тогда
$I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}dx=$

$\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x}+\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x}=$

$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Получили табличные интегралы
$I=tg\ x-ctg\ x+C$.

Ответ: $I=tg\ x-ctg\ x+C$.
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Расписан числитель по основному тригонометрическому тождеству- 0,5 балла

Задание 17. В координатах даны векторы:

$\vec{a}=(1;\ 5;\ 1),\ \vec{b}=(1;\ -5;\ 2)$

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?
Решение. Вычислять будем путём сложения произведений соответствующих координат.
$\vec{a}\bullet\vec{b}=1\bullet1+5\bullet(-5)+1\bullet2=1-25+2=-22$.

Получили отрицательное число, поэтому векторы образуют тупой угол.

Ответ: векторы образуют тупой угол.
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Вычислено скалярное произведение- 0,5 балла

Задание 18 Найти экстремумы функции $y = \ln\left(x^2 - 6x + 10\right)$.
Решение. Найдём производную функции

$$y' = \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \bullet (2x - 6) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10}.$$

Приравняем производную нулю, чтобы найти критические точки:

$$\frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} = 0.$$

Так как для любых значений "икса" знаменатель не равен нулю, то приравняем нулю числитель:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Получили одну критическую точку x = 3. Определим знак производной в интервалах, разграниченных этой точкой:
в интервале от минус бесконечности до 3 - знак минус, то есть функция убывает,
в интервале от 3 до плюс бесконечности - знак плюс, то есть функция возрастает.
То есть, точка x = 3 является точкой минимума.
Найдём значение функции в точке минимума:

$$y(3) = \ln\left(3^2 - 6 \bullet 3 + 10\right) = \ln 1 = 0.$$

Таким образом, точка экстремума функции найдена: (3; 0), причём она является точкой минимума.

Ответ: (3; 0) точка минимума
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдена критическая точка- 0,5 балла

Задание 19. Найти произведение матриц A и B, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число строк в матрице A - 3, число столбцов в матрице B - 3. Следовательно, размерность матрицы $C = AB$ - 3 X 3.
Вычисляем элементы матрицы $C = AB$.

$$c_{11} = 2 \bullet 1 = 2$$

$$c_{12} = 2 \bullet 2 = 4$$

$$c_{13} = 2 \bullet 3 = 6$$

$$c_{21} = 1 \bullet 1 = 1$$

$$c_{22} = 1 \bullet 2 = 2$$

$$c_{23} = 1 \bullet 3 = 3$$

$$c_{31} = 3 \bullet 1 = 3$$

$$c_{32} = 3 \bullet 2 = 6$$

$$c_{33} = 3 \bullet 3 = 9$$

Найденное произведение матриц:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдена размерность произведения матриц-0,5 балла

Задание 20. Найти угол между прямыми, заданными общими уравнениями $x-3y+5=0$ и $2x+4y-7=0$.

Решение. Используя формулу $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\bullet\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{1\bullet 2-3\bullet 4}{\sqrt{1+9}\bullet\sqrt{4+16}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\bullet\sqrt{20}} =$$
$$= \frac{-10}{\sqrt{200}} = \frac{-10}{\sqrt{25}\bullet\sqrt{2}\bullet\sqrt{4}} = \frac{-10}{10\bullet\sqrt{2}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем угол $\varphi = -\dfrac{\pi}{4} = 45^0$.

Ответ: 45^0

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу косинуса угла между прямыми- 0,5 балла

Задание 21. Если эксцентриситет кривой больше 1, то эта кривая_____________

Ответ: Гипербола

Задание 22. Определитель произведения двух квадратных матриц равен ___________

Ответ: произведению их определителей

Задание 23 Вычислить векторное произведение векторов $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, если их длины $|\vec{a}|$ =4 и $\left|\vec{b}\right|$=15, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =48.

Решение. Из отношения скалярного произведения к произведению длин векторов находим косинус угла между векторами:

$$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{48}{4\cdot 15} = \frac{4}{5}$$

Синус угла между векторами можем выразить через косинус по известному из школьного курса тригонометрическому тождеству:

$$\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sqrt{1-\left(\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)^2}$$

$$\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

Далее, вычисляем:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=4\cdot15\cdot\frac{3}{5}=36$$

Ответ: 36

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найден синус угла- 0,5 балла

Задание 24. Площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу двух векторах, равна __________ длины векторного произведения этих векторов

Ответ: половине

Задание 25. **Установите соответствие.**

1. имеет отношение	a) аргумент комплексного числа
2. не имеет отношение	b) мнимая единица
	c) сумма координат точек, в виде которой отображается комплексное число
	d) модуль комплексного числа

Запишите в ответ, расположив их в порядке, соответствующем цифрам:

a	b	c	d

Ответ:

a	b	c	d
1	1	2	1

Задание 26. Так как степень числителя, равная _______ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-5x}{x^2+x^3}$ меньше степени знаменателя_______, то предел равен_________

Ответ: 1, 3,0

Задание 27 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}$.

Решение. Подстановка вместо *x* бесконечности приводит к неопределённости:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right).$$

Значит, можно привести выражение ко второму замечательному пределу. Упрощаем функцию, представив степень $3x=6x\bullet\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x\bullet\frac{1}{2}}.$$

Заменяем функцию *6x* переменной *n*, которая также стремится к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x\bullet\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\bullet\frac{1}{2}}.$$

Используем второй замечательный предел,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\bullet\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Ответ: $\sqrt{e}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает второй замечательный предел- 0,5 балла

Задание 28. Дифференциал функции можно использовать в приближенных вычислениях, потому, что чем меньше приращение независимой переменной, тем ___________долю приращения функции составляет дифференциал

Ответ: большую

Задание 29. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y = e^{1-x^2}$, если абсцисса точки касания $x_0 = -1$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$$y_0 = y(-1) = e^{1-1} = 1.$$

Как и в предыдущем примере, данная функция - сложная, так как степень ($1-x^2$) сама является функцией. Поэтому найдём производную функции как производную сложной функции:

$$f'(x) = y' = -2x\bullet e^{1-x^2}.$$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$$f'(x_0) = y'(-1) = -2\bullet(-1)\bullet e^0 = 2.$$

Получаем уравнение касательной:

$$y-1 = 2(x+1)$$

$$y-1 = 2x+2.$$

Приводим уравнение к общему виду:

$2x - y + 3 = 0$

Ответ: $2x - y + 3 = 0$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено значение производной- 0,5 балла

Задание 30. Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции с геометрической точки зрения равен __________ криволинейной трапеции

Ответ: площади

Задание 31. Что не является шагом нахождения экстремума функции двух переменных?

a) нахождение определителя
b) подстановка значения критической точки в исходную функцию двух переменных
c) нахождение асимптот
d) решение системы уравнений
e) нахождение интеграла

Ответ: c) нахождение асимптот, e) нахождение интеграла

Задание 32. Двойной интеграл проще вычислить в полярных координатах, когда:

a) область интегрирования - окружность
b) сложно расставить пределы интегрирования
c) область интегрирования - часть окружности
d) подынтегральная функция - сложная функция
e) невозможно поменять местами переменные

Ответ: a) область интегрирования – окружность, c) область интегрирования - часть окружности

Задание 33. Решение, содержащее n независимых произвольных постоянных, называется__________ решением дифференциального уравнения n-го порядка
Ответ: общим

Задание 34. Частное решение уравнения вида $y'' - py' = f(x)$, где правая часть – многочлен первой степени, следует искать в виде______________

Ответ: $Y = x(Ax + B)$

Задание 35. Если радиус сходимости для степенного ряда R > 0, то этот ряд сходится на интервале_______________

Ответ: $]-R,\ R[$

Задание 36. Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx.$$

Решение. Положим $3x+1=t^3$, откуда $3x=t^3-1$ и $x=\frac{t^3-1}{3}$.

Тогда $dx=\left(\frac{t^3-1}{3}\right)' dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right)' dt=\frac{3t^2}{3}dt=t^2dt$, в свою очередь $t=\sqrt[3]{3x+1}$.

Заменяем переменную и получаем:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}=\int \frac{\frac{t^3-1}{3}\bullet t^2dt}{t}=\int t^{-1}\bullet \frac{t^3-1}{3}\bullet t^2dt,$$

где степени при *t* складываются. Продолжаем преобразования и, пользуясь табличным интегралом, получаем:

$$J(\text{интеграл})=\int\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right)t\ \ dt=$$

$$=\int\left(\frac{t^4}{3}-\frac{t}{3}\right)dt=\frac{t^5}{15}-\frac{t^2}{6}+C.$$

Ответ: $\frac{t^5}{15}-\frac{t^2}{6}+C.$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдена правильная замена переменной- 0,5 балла

Задание 37. В координатах даны векторы:

$$\vec{a}=\left(1;\ \ 5;\ \ 1\right),\ \ \vec{c}=\left(2;\ \ 1;\ \ \frac{3}{2}\right),$$

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?

Решение. Вычислять будем путём сложения произведений соответствующих координат.

$$\vec{a}\bullet\vec{c}=1\bullet 2+5\bullet 1+1\bullet\frac{3}{2}=2+5+\frac{3}{2}=\frac{17}{2}=8,5.$$

Получили положительное число, поэтому векторы образуют острый угол.

Ответ: векторы образуют острый угол.

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено скалярное произведение- 0,5 балла

Задание 38 Найти экстремумы функции $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Решение:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$$

Найдём первую производную функции

$$y'=\frac{1 \bullet \ln x - x \bullet \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Найдём критические точки функции:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}=0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x - 1 = 0 \\ \ln^2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=e \\ x=1 \end{cases}$$

Таким образом, у данной функции две критические точки: $x=1$ и $x=e$. Определим значения производной в критических точках. При переходе через точку $x=1$ производная функции продолжает убывать (сохраняет знак минус), а при переходе через точку $x=e$ - начинает возрастать (меняет знак с минуса на плюс). Следовательно, $x=e$ - точка минимума функции.

Найдём значение функции в точке минимума:

$$y_{\min}(e)=\frac{e}{\ln e}=\frac{e}{1}=e$$

Таким образом, минимум функции:

$$y_{\min}(e)=e.$$

Ответ: $x=e$ точка минимума
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдены критические точки- 0,5 балла

Задание 39. Число строк матрицы *C*, которая является произведением двух матриц *A* и *B* следующих размерностей: 2 X 10 и 10 X 5 равно_______

Ответ: 2

Задание 40. Решить *однородное дифференциальное уравнение*

$\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$

Решение. Сначала преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2}{x^2},$$

а затем произведём подстановку $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'x+z=\frac{xzx+(zx)^2}{x^2},$$ или $$x\frac{dz}{dx}=z^2,$$ или $$\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|C|,$$ или $$\ln|Cx|=-\frac{1}{z}.$$

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получим $\ln|Cx|=-\frac{x}{y}$, откуда $y=-\frac{x}{\ln|Cx|}$.

Ответ: $y=-\frac{x}{\ln|Cx|}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Уравнение приведено к виду $\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x}$ - 0,5 балла

Формируемая компетенция	**Показатели освоения компетенций**
ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.	**уметь**: • выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений; • решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости; • применять методы дифференциального и интегрального исчисления; • решать дифференциальные уравнения; • пользоваться понятиями теории комплексных чисел; **знать**: • основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии; • основы дифференциального и интегрального исчисления; • основы теории комплексных чисел.

Задание 41. Какие из понятий имеют отношения к эллипсу?

a) Эксцентриситет
b) Асимптоты
c) Расстояние от точки до фокуса
d) Меньшая ось

Ответ: a), c), d)

Задание 42. Если система уравнений __________данной, то системы имеют одинаковые решения

Ответ: равносильна

Задание 43. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известны координаты его вершин:
A (3; 1; -1), *B* (-1; 0; 2), *C* (3; 2; -2).

Решение. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(-1-3;\ \ 0-1;\ \ 2-(-1)\right) = \left(-4;\ -1;\ 3\right)$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(3-3;\ \ 2-1;\ -2-(-1)\right) = \left(0;\ 1;\ -1\right)$$

Площадь треугольника равна половине длины векторного произведения векторов, на которых он построен. Найдём векторное произведение через координаты векторов:

$$\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

То есть, координаты вектора, являющегося векторным произведением исходных векторов:

$\vec{N} = \left(-2;\ -4;\ -4\right)$, откуда найдём его длину:
$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Теперь получим требуемую площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\overrightarrow{N}|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{|\overrightarrow{N}|}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено векторное произведение - 0,5 балла

Задание 44. Установите соответствие. Если векторы компланарны, то

1. имеет отношение	a) Они лежат в одной плоскости
2. не имеет отношение	b) Их смешанное произведение равно нулю
	c) Равен нулю определитель, строками которого служат координаты этих векторов
	d) Их сумма даёт нулевой вектор

Запишите в ответ, расположив их в порядке, соответствующем цифрам:

a	b	c	d

Ответ:

a	b	c	d
1	1	1	2

Задание 45. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме аргумент произведения равен _____________ аргументов сомножителей

Ответ: сумме

Задание 46. Установите соответствие. Что из перечисленного не обязательно является бесконечно малой величиной

1. является	a) Сумма бесконечно малых величин
2. не обязательно	b) Произведение бесконечно малых величин
	c) Отношение двух бесконечно малых величин
	d) Разность бесконечно малых величин

Запишите в ответ, расположив их в порядке, соответствующем цифрам:

a	b	c	d

Ответ:

a	b	c	d
1	1	2	1

Задание 47. Найти предел

$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

Решение. Применяем разновидность второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{2/(2x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^{1/(2x)}\right]^{2}=$$
$$\left[\lim_{2x\to 0}\left(1+2x\right)^{1/(2x)}\right]^{2}=e^{2}.$$

Ответ: e^2

Задание 48. Функция возрастает на интервале, если график её производной расположен ______оси Ох на этом интервале

Ответ: выше

Задание 49. Составить уравнение нормали к графику функции $y=e^{1-x^2}$, если абсцисса точки касания $x_0=-1$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$y_0=y(-1)=e^{1-1}=1$.

Как и в предыдущем примере, данная функция - сложная, так как степень ($1-x^2$) сама является функцией. Поэтому найдём производную функции как производную сложной функции:

$$f'(x)=y'=-2x\bullet e^{1-x^2}.$$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$$f'(x_0)=y'(-1)=-2\bullet(-1)\bullet e^{0}=2.$$

Составляем уравнение нормали:

$$x+1+2(y-1)=0$$
$$x+1+2y-2=0$$
$$x+2y-1=0.$$

Ответ: $x+2y-1=0$.

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдена ордината точки касания - 0,5 балла

Задание 50. Для функции нескольких переменных геометрической интерпретации не существует, если число переменных более_____

Ответ: трех

Задание 51. Связь между переменными заданная уравнением, относится к понятию _____________ экстремума?

Ответ: условного

Задание 52. Вычисляется двойной интеграл в полярных координатах. Угол φ изменяется от $\pi/2$ до 2π, радиус - от 0 до 3. Тогда верхний предел интегрирования во внешнем интеграле равен ___?

Ответ: 2π

Задание 53. При решении линейного однородного дифференциального уравнения $y''+y'-2y=0$, укажите корни характеристического уравнения

a) 1
b) 3
c) –3
d) –2

Ответ: a), d)

Задание 54. Какой из рядов является сходящимся?

a) $1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\ldots+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

b) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

c) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+.$

Ответ: b), d)

Задание 55. Какие из рядов, согласно интегральному признаку Коши, являются расходящимися?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{1+3^{2k}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

Ответ: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

Задание 56. Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}.$$

Решение. Полагаем $t = \ln x$, тогда

$$dt = \frac{dx}{x}.$$

Заменяем переменную и получаем:

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$

Задание 57. В координатах даны векторы:

$$\vec{a} = (1;\ \ 5;\ \ 1),\quad \vec{d} = (0;\ \ 0;\ \ 1)$$

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?

Решение. Вычислять будем путём сложения произведений соответствующих координат.

$$\vec{a} \bullet \vec{d} = 1 \bullet 0 + 5 \bullet 0 + 1 \bullet 1 = 1.$$

Получили положительное число, поэтому векторы образуют острый угол.

Ответ: векторы образуют острый угол.
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено скалярное произведение - 0,5 балла

Задание 58 Число столбцов матрицы *C*, которая является произведением двух матриц *A* и *B* следующих размерностей: 10 X 2 и 2 X 5 равно_________

Ответ: 5

Задание 59. Найти угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3}$ и $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1}$.

Решение. По формуле (2) находим:

$$\cos\varphi = \frac{3 \bullet 2 + 3 \bullet 1}{\sqrt{9+9} \bullet \sqrt{2+1}} = \frac{9}{\sqrt{18} \bullet \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу косинуса угла между векторами - 0,5 балла

Задание 60. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_e^{e^2} \ln x \, dx.$$

Решение. Интегрируем по частям, полагая *u* = ln *x*, *dv* = *dx*; тогда *du* = (1/*x*)*dx*, *v* = *x*. По формуле $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$ находим

$$I = x\ln x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx =$$

$$= e^2 \ln e^2 - e\ln e - x\Big|_e^{e^2} =$$

$$= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Ответ: e^2.

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулы интегрирования по частям - 0,5 балла

Задание 61. Если парабола задана уравнением $y^2 = 8x$, то расстояние от фокуса до директрисы равно ____

Ответ: 4

Задание 62. При решении систем уравнений методом Гаусса можно:

a) удалять равные или пропорциональные строки кроме одной
b) любую строку умножать или делить на некоторое число отличное от нуля
c) переставлять местами строки
d) умножать любой столбец на некоторое число

Ответ: a) удалять равные или пропорциональные строки кроме одной, b) любую строку умножать или делить на некоторое число отличное от нуля, c) переставлять местами строки

Задание 63. Найти длину векторного произведения векторов $\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, если $\vec{a} = (2;\ 3;\ 4),\ \vec{b} = (1;\ 1;\ 3).$

Решение:

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=5\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}.$$

Это означает, что можем записать координаты вектора, являющегося векторным произведением:

$$\vec{c}=\left(5;\ -2;\ -1\right).$$

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{5^2+\left(-2\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{30}.$$

Ответ: $\sqrt{30}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу для нахождения векторного произведения - 0,5 балла

Задание 64. Среди двух неколлинеарных векторов могут быть:

a) Вектора, длины которых равны длине орта
b) Нулевой вектор
c) Единичный вектор

Ответ: а) Вектора, длины которых равны длине орта, с) единичный вектор

Задание 65. При делении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме аргумент частного двух комплексных чисел, получается_________ аргумента делителя из аргумента делимого

Ответ: вычитанием

Задание 66. Если выражение приведено к отношению двух первых замечательных пределов, то предел равен ______________________________ коэффициентов при этих пределах

Ответ: отношению

Задание 67. Если предел отношения производных представляет собой неопределённость, то можно применить правило ________________

Ответ: Лопиталя

Задание 68. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2-5x+4$, если абсцисса точки касания $x_0=-1$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$y_0=y\left(-1\right)=1+5+4=10$.

Найдём производную функции:

$f'\left(x\right)=y'=2x-5$.

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$f'(x_0) = y'(-1) = -2 - 5 = -7$.

Подставляем все полученные данные в "формулу-болванку" и получаем уравнение касательной:

$$y - 10 = -7(x+1)$$
$$y - 10 = -7x - 7$$

Приводим уравнение к общему виду (все буквы и числа, отличные от нуля, собираем в левой части, а в правой оставляем ноль):

$$7x + y - 3 = 0$$

Ответ: $7x + y - 3 = 0$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдено значение производной - 0,5 балла

Задание 69. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям**:**

$$\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение. В подынтегральном выражении - логарифм, который, как мы уже знаем, разумно обозначить через *u*. Полагаем, что $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Тогда $v = 2\sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{x}$.

Находим логарифмическую функцию, а во втором слагаемом (под знаком интеграла) - функцию, не содержащую логарифма

$$I = \ln x \bullet 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} =$$
$$= 2\ln x \bullet \sqrt{x} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= 2\ln x \bullet \sqrt{x} - 2 \bullet 2\sqrt{x} + C =$$
$$= 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу метода интегрирования по частям - 0,5 балла

Задание 70. Производная по направлению является____________ комбинацией частных производных

Ответ: линейных

Задание 71. Что из следующего относится к области *D* в записи двойного интеграла?

а) плоская фигура

b) фигура, ограниченная прямыми линиями
c) сфера
d) треугольник

Ответ: a) плоская фигура, b) фигура, ограниченная прямыми линиями
d) треугольник

Задание 72. Что является формулой, связывающей прямоугольные координаты с цилиндрическими?
a) $x = r\cos\varphi$
b) $y = r\sin\varphi$
c) $z = r\,\mathrm{tg}\varphi$

Ответ: a) $x = r\cos\varphi$, *b)* $y = r\sin\varphi$

Задание 73. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = x + \sin x$$

Решение. Непосредственно находим функцию по её производной, интегрируя:

$$y = \int (x + \sin x)dx = \int xdx + \int \sin xdx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает табличные интегралы - 0,5 балла

Задание 74. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\bullet 2} + \frac{1}{2\bullet 2^2} + \frac{1}{3\bullet 2^2} + \ldots + \frac{1}{n2^n} + \ldots .$$

Решение. Члены данного ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося геометрического ряда с общим членом

$$u_n = 1/2^n: \ \frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n} \ (n = 1, 2, 3\ldots).$$

Согласно признаку сравнения, данный ряд также сходится.

Ответ: Ряд сходится
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает признак сравнения - 0,5 балла

Задание 75. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ равен___3

Ответ: 3

Задание 76. Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:
$\int \frac{e^x dx}{10-6e^x}$.

Решение. Положим $t = 10-6e^x$, откуда $6e^x = 10-t$, $e^x = \frac{10-t}{6}$, $x = \ln\left(\frac{10-t}{6}\right)$.
Тогда

$$dx = \frac{1}{\frac{10-t}{6}} \bullet \left(\frac{10-t}{6}\right)' = \frac{6}{10-t} \bullet \left(-\frac{1}{6}\right) dt =$$

$$= \frac{6}{10-t} \bullet \left(-\frac{1}{6}\right) dt.$$

Заменяем переменную и получаем:

$$I = \int \frac{10-t}{6} \bullet t^{-1} \bullet \frac{6}{10-t} \bullet \left(-\frac{1}{6}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\int t^{-1} dt = -\frac{1}{6}\ln|t| + C.$$

Возвращаясь к переменной *x*, получаем ответ:

$$I = -\frac{1}{6}\ln\left|10-6e^x\right| + C.$$

Ответ: $I = -\frac{1}{6}\ln\left|10-6e^x\right| + C$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Выбрана правильная подстановка - 0,5 балла

Задание 77. В координатах даны векторы:

$$\vec{c} = \left(2;\ 1;\ \frac{3}{2}\right), \vec{d} = (0;\ 0;\ 1)$$

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?

Решение. Вычислять будем путём сложения произведений соответствующих координат.

$$\vec{c} \bullet \vec{d} = 2 \bullet 0 + 1 \bullet 0 + \frac{3}{2} \bullet 1 = \frac{3}{2}.$$

Получили положительное число, поэтому векторы образуют острый угол.

Ответ: векторы образуют острый угол.
Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу скалярного произведения - 0,5 балла

Задание 78 Найти экстремумы функции $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

Решение. Найдём первую производную функции

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{1+x^2} \bullet 2x = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

Найдём критические точки функции:

$$\frac{1-x}{1+x^2} = 0.$$

Так как для любого действительного *x* должно выполняться условие $1+x^2 \neq 0$, то

$$1 - x = 0, \quad x = 1.$$

Таким образом, данная функция имеет одну критическую точку. Определим значения производной в критической точке. При переходе через точку $x = 1$ производная функции начинает убывать (меняет знак с плюса на минус). Следовательно, $x = 1$ - точка максимума функции.

Найдём значение функции в точке максимума:

$$y_{\max}(1) = \operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+1^2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Таким образом, максимум функции:

$$y_{\max}(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ответ: $x = 1$ точка максимума

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Найдены критические точки - 0,5 балла

Задание 79. Найти произведение матриц *A* и *B*, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число строк в матрице *A* - 2, число столбцов в матрице *B* - 1. Следовательно, размерность матрицы *C* = *AB* - 2 X 1.

Вычисляем элементы матрицы *C* = *AB*.

$$c_{11} = 3 \bullet 1 + 2 \bullet 2 + 1 \bullet 3 = 10$$
$$c_{21} = 0 \bullet 1 + 1 \bullet 2 + 2 \bullet 3 = 8$$

Произведение матриц запишется в виде матрицы-столбца: $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу умножения матриц - 0,5 балла

Задание 80. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ и $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{4}$.

Решение. По формуле $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{5}{6}}{-\frac{5}{6}} = 1$$

Искомый угол

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$$

Ответ: 45^0

Критерий оценивания: Ответ верный -1 балл. Знает формулу тангенса угла между прямыми через угловые коэффициеннты - 0,5 балла

Составитель: Алутин П.П., кандидат физико-математических наук, доцент

6 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2023/2024 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2023/2024 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 10 от 21.06.2023 г.).