МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»

ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана физико-математического факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»

_________________ О.А.Днепровская
«22» мая 2019 г.

Рабочая программа дисциплины
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки
02.03.03 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И АДМИНИСТРИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Профиль
ТЕХНОЛОГИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Принята
на заседании кафедры информатики
и методики преподавания информатики
(протокол № 9 от «15» мая 2019 г.)

Благовещенск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: формирование у студентов компетентности в области численных методов решения задач математических задач с использованием компьютерной техники, овладение научным фундаментом вычислительной математики, понимание ее идей, методов, фактов и структур.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Вычислительная математика» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б1 (Б1.В.06).

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1, ПК-8.

– **ОПК-1.** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, **индикаторами** достижения которой является:

- ОПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук;
- ОПК-1.2 – **умеет** использовать их в профессиональной деятельности;
- ОПК-1.3 – **имеет навыки** выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

– **ПК-1**. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий, **индикаторами** достижения которой является:

- ПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий;
- ПК-1.2 – **умеет** находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области программирования и информационных технологий.

– **ПК-8**. Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования, **индикаторами** достижения которой является:

- ПК-8.1 – **знает** современные методы разработки и реализации алгоритмов математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования;
- ПК-8.2 – **умеет** разрабатывать и реализовывать алгоритмы математических моделей на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования;
- ПК-8.3 – **имеет практический опыт** разработки и реализации алгоритмов их на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и методы вычислительной математики,
- численные методы решения различных математических задач,
- оценки алгоритмов численных методов решения математических задач по интеллектуальной сложности, вычислительным затратам, устойчивости к погрешностям исходных данных и округлений,
- особенности компьютерной реализации численных методов, границы применимости численных методов, возможности основных специализированных математических пакетов, реализующих численные методы,

- перспективы совершенствования численных методов и компьютерных инструментальных средств для их реализации;

уметь:

- использовать основные понятия и методы вычислительной математики,
- численные решать типовые математические задачи, проводить необходимые расчеты в рамках построенных моделей, анализировать результаты, оценивать погрешность полученного решения,
- анализировать и сравнивать алгоритмы численных методов решения математических задач по интеллектуальной сложности, вычислительным затратам, устойчивости к погрешностям исходных данных и округлений, границам применимости, особенностям компьютерной реализации;

владеть:

- навыками численного решения математических задач с использованием разнообразных средств компьютерной поддержки, выбора численного метода решения математической задачи в зависимости от особенности задачи и наличия инструментальных компьютерных средств ее решения,
- технологиями применения вычислительных методов для исследования и решения задач из различных областей математики и ее приложений,
- навыками практической оценки точности результатов, полученных в ходе решения тех или иных вычислительных задач, на основе теории приближений,
- основными приемами использования вычислительных методов при решении различных задач профессиональной деятельности.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Вычислительная математика» составляет 5 зачетных единиц (далее – ЗЕ) (180 часов).

Программа предусматривает изучение материала на лекциях практических и лабораторных занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 6
Общая трудоемкость	180	180
Аудиторные занятия	90	90
Лекции	32	32
Практические занятия	20	20
Лабораторные работы	28	28
Самостоятельная работа	64	64
Вид итогового контроля	36	экзамен

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия			Само-стоя-тельная работа
			Лек-ции	Практи-ческие за-нятия	Лабора-торные работы	
1.	Теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма.	14	4	2	2	6
2.	Особенности математических вычислений, реализуемых на компьютере.	14	4	2	2	6
3.	Решение системы линейных уравнений: прямые методы.	30	6	4	8	12
4.	Решение системы линейных уравнений: итерационные методы.	18	4	2	4	8
5.	Решение нелинейного уравнения.	18	4	2	4	8
6.	Решение системы нелинейных уравнений.	6	2			4
7.	Методы приближения функций	20	4	4	4	8
8.	Численное интегрирование.	12	2	2	2	6
9.	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	12	2	2	2	6
	Экзамен	36				
ИТОГО		**180**	**32**	**20**	**28**	**64**

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма.	лк	Лекция с проблемными вопросами, с организацией обсуждений	2
2.	Особенности математических вычислений, реализуемых на компьютере.	лк	Лекция с постановкой противоречивых ситуация, организация поиска вариантов их разрешения	2
3.	Решение системы линейных уравнений: прямые методы.	лк	Лекция с проблемными вопросами, с организацией обсуждений	2
4.	Решение системы линейных уравнений: итерационные методы.	лк лб	Лекция с элементами выступлений студентов с	4

			последующим обсуждением Работа в группах	
5.	Решение нелинейного уравнения.	пр лб	Работа в группах	4
6.	Решение системы нелинейных уравнений.	лб	Взаимопроверка	2
7.	Методы приближения функций	пр лб	Работа в группах	4
8.	Численное интегрирование.	лб	Взаимопроверка	2
ИТОГО				**22**

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма.

Моделирование как один из основных методов научного познания. Этапы решения задачи методом математического моделирования. История вычислительной математики. Вычислительная математика и численные методы как научные направления. Основные математические задачи, решаемые численными методами. Метод вычислительной математики. Задача вычислительной математики в общем виде. Структура и источники погрешности результата при решении задачи методом математического моделирования. Устранимая и неустранимая погрешность. Эмпирические правила при организации вычислений. Корректность математической задачи. Устойчивость задачи как мера чувствительности к погрешностям исходных данных. Плохая обусловленность задачи. Неустойчивость численного метода. Корректность численного алгоритма. Примеры плохо обусловленных задач и неустойчивых численных методов. Основные задачи раздела «Численные методы».

Тема 2. Особенности математических вычислений, реализуемых на компьютере.

Точное и приближенное значения величины. Погрешность, абсолютная и относительная погрешности значения приближенной величины. Абсолютная и относительная погрешности вещественных чисел. Десятичная запись приближенных значений. Значащие, верные и сомнительные цифры десятичной записи числа. Связь относительной погрешности с количеством верных значащих цифр в десятичной записи приближенного значения. Правила округления чисел. Основная и обратная задачи теории погрешностей. Основные методы решения этих задач.

Числа конечной точности. Форматы записи чисел в памяти компьютера: с фиксированной и плавающей запятой. Основные числовые характеристики и свойства чисел с фиксированной запятой. Нормализованная запись вещественных чисел. Формат представления вещественных чисел в памяти компьютера. Стандарт IEEE-754 представления вещественных чисел. Основные числовые параметры системы чисел с плавающей запятой. Выполнение арифметических действий над числами в ограниченном количестве разрядов. Ситуации, приводящие к возникновению ошибок при выполнении арифметических операция над числами в ограниченном количестве разрядов. Алгебраические особенности системы чисел конечной точности.

Тема 3. Решение системы линейных уравнений: прямые методы.

Основные задачи линейной алгебры, решаемые численными методами. Классификация методов решения алгебраических задач. Постановка задачи решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Геометрическая интерпретация. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений. Правило Крамера решения СЛАУ, оценка вычислительных затрат и сложности алгоритма по времени. Классический метод Гаусса решения СЛАУ, оценка сложности алгоритма по времени. Модификации метода Гаусса с целью усиления устойчивости алгоритма к погрешностям исходных данных и промежуточных вычислений. Применение метода Гаусса к вычислению определителей и обращению матриц. Метод LU-разложения решения СЛАУ. Обзор методов решения СЛАУ с матрицами специального вида. Проблема роста вычислительных затрат и погрешности при увеличении размерности систем при решении СЛАУ и обращении матриц. Слабая обусловленность. Число обусловленности матрицы.

Тема 4. Решение системы линейных уравнений: итерационные методы.

Итерационные методы решения алгебраических задач как альтернатива прямым методам. Применение теоремы о сжимающих отображениях при решении системы линейных уравнений: простые итерации, метод Якоби, метод Зейделя. Условия сходимости итерационных методов. Оценка погрешности приближенного решения и критерий остановки итерационного процесса. Погрешности округления при практической реализации итерационного процесса. Ускорение сходимости итерационной последовательности. Понятие о методе релаксации.

Тема 5. Решение нелинейного уравнения.

Постановка задачи. Прямые методы решения нелинейных уравнений, причины применения численных методов. Приближенное значение корня. Геометрическая интерпретация. Основные этапы численного решения уравнения с одним неизвестным. Локализация корней. Теоремы о существовании и единственности корня нелинейного уравнения. Приближенное вычисление корня уравнения с заданной точностью методом половинного деления. Метод простой итерации численного решения уравнений. Условия сходимости итерационной последовательности. Практические схемы вычисления приближенного значения корня уравнения с заданной точностью методом простой итерации. Сходимость и устойчивость численного метода. Метод хорд. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности приближения по методу хорд и критерий остановки итерационного процесса. Метод касательных. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности приближения по методу касательных и критерий остановки итерационного процесса. Комбинированный метод.

Тема 6. Решение системы нелинейных уравнений.

Методы решения систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Зейделя как модификация метода простой итерации. Достаточное условие сжатости отображения для системы нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Уменьшение вычислительных затрат в методе Ньютона. Практические схемы решения на ЭВМ.

Тема 7. Методы приближения функции.

Задачи, приводящие к аппроксимации одной функции другой. Алгебраический интерполяционный многочлен: единственность, форма Лагранжа, оценка погрешности интерполирования. Практическая оценка погрешности интерполирования. Обратное интерполирование. Понятие о сходимости интерполяционного процесса. Понятия о сплайнах. Практические схемы интерполирования на ЭВМ.

.

Тема 8. Численное интегрирование.

Квадратурная формула прямоугольников. Формулы Ньютона-Котеса. Метод неопределенных коэффициентов. Формула трапеций. Формула Симпсона. Квадратурная формула Гаусса.

Постановка задачи приближенного вычисления определенного интеграла, формула прямоугольников. Формулы Ньютона-Котеса. Метод неопределенных коэффициентов. Формула трапеций. Практическая оценка погрешности квадратурных формул. Формула Симпсона. Квадратурная формула Гаусса, оценка порядка убывания погрешности. Вычислительная погрешность квадратурных формул. Метод Монте-Карло. Численное интегрирование на ЭВМ.

Тема 9. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Рунге-Кутта. Многошаговые методы. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта. Многошаговые методы. Решение краевой задачи для линейного 2-го порядка сведением к разностной краевой задаче. Метод прогонки. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционный курс по дисциплине «Вычислительная математика» должен строиться таким образом, чтобы, приступая к изучению каждой новой темы, студенты знали, какие вопросы ранее изученного материала будут использованы при изучении нового. Лекции должны носить проблемный характер. Студенты должны привлекаться к постановке проблемы, к поиску путей ее решения, обоснованию каждого утверждения. Используемые методы должны ориентировать обучающихся на их усвоение и применение в будущем.

В начале каждой лекции необходимо уяснить цель, которую лектор ставит перед собой и перед студентами. Необходимо ориентировать студентов на сравнение того, что он слышит на лекции с тем, что им было изучено ранее, укладывать новую информацию в собственную, уже имеющуюся у него систему знаний. По ходу лекции целесообразно подчеркивать новые понятия, выяснять их смысл, разъяснять как основные положения дисциплины находят практическое применение при решении конкретных задач.

Важная роль должна быть отведена на лекции дискуссии. С этой целью в процессе подготовки к лекции целесообразно продумать систему вопросов, на которые должны ответить студенты, с полным обоснованием своих утверждений.

В конце лекции вместе со студентами целесообразно подвести ее итоги и убедиться, что поставленная цель достигнута.

Каждое лабораторное занятие целесообразно начинать с повторения теоретического материала, который будет использован на нем. Для этого очень важно четко сформулировать цель занятия и основные знания, умения и навыки, которые студент должен приобрести в течение занятия.

Содержание задания должно отражать проблемные и значимые вопросы рассматриваемой темы. Каждая работа должен быть направлена на отработку определенных теоретических положений и умений их использования в процессе выполнения конкретных заданий, и тесно взаимосвязано с вопросами, выносимыми на занятия. Решение заданий должно происходить студентами самостоятельно под контролем преподавателя, во время выполнения которого студент может обратиться к преподавателю с вопросом, получить на него ответ.

Самостоятельная работа студентов при изучении дисциплины «Технологии обработки информации» организуется с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию различных источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике;
- развития познавательных способностей студентов, формирования самостоятельности мышления;
- развития активности, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации, саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

Методические рекомендации по проведению лабораторных работ. Лабораторный практикум, затрагивает основные разделы дисциплины «Базы данных и системы управления базами данных», позволяет студентам получить достаточно полное представление о структуре баз данных, способах создания схемы базы данных, а также приобрести практические навыки разработки запросов, необходимые для решения различных задач создания и использования баз данных.

Лабораторные работы имеют различный уровень сложности. Каждая предполагает самостоятельную работу студентов по освоению лекций. Текущий контроль знаний осуществляется путем опроса студентов после выполнения работы.

Требования к отчетам по лабораторным работам

1. Отчет оформляется в электронном виде в одном из форматов *.doc, *.docx, *.pdf.
2. Титульный лист должен содержать название работы, Ф.И.О. студента, номер варианта.
3. Отчет о выполнении заданий оформляется в соответствии с образцами.

Самостоятельная работа студентов при изучении дисциплины «Вычислительная математика» организуется с целью формирования общекультурных и профессиональных компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию различных источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике;
- развития познавательных способностей студентов, формирования самостоятельности мышления;
- развития активности, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации, саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

В ходе изучения дисциплины «Вычислительная математика» предлагается выполнить различные виды самостоятельной работы:

- выполнение индивидуальных заданий на лабораторных занятиях;

- подготовка к аудиторным занятиям и выполнение заданий разного типа и уровня сложности; подготовка к проблемным лекциям, дискуссионным вопросам, коллоквиумам;
- изучение отдельных тем (вопросов) дисциплины в соответствии с учебно-тематическим планом, составление конспектов;
- составление логических и структурных схем;
- решение задач; выполнение самостоятельных работ, выполнение домашних заданий, подготовка ответов на вопросы для самоконтроля, составление отчётов к лабораторным работам;
- выполнение мини-исследований;
- индивидуальные консультации, индивидуальные собеседования;
- подготовка ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к текущему контролю успеваемости (в течение семестра), промежуточной аттестации (по окончании семестра).

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка к практическому занятию и лабораторной работе	6
2.	Особенности математических вычислений, реализуемых на компьютере.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка к практическому занятию и лабораторной работе	6
3.	Решение системы линейных уравнений: прямые методы.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка к практическому занятию и лабораторной работе.	12
4.	Решение системы линейных уравнений: итерационные методы.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	8
5.	Решение нелинейного уравнения.	Создание и отладка хранимых процедур и функций. Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	8
6.	Решение системы нелинейных уравнений.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ.	4

		Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	
7.	Методы приближения функций	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	8
8.	Численное интегрирование.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	6
9.	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	Проработка теоретического материала по конспектам лекций и материалам СЭО БГПУ. Подготовка отчетов о выполнении лабораторных работ	6
	ИТОГО		**64**

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Материалы практикума расположены в СЭО БГПУ, режим доступа: http://moodle.bgpu.ru/

План проведения практических занятий по дисциплине

Практическое занятие № 1. Метрика. Норма. Оператор.
Практическое занятие № 2. Основы теории погрешностей.
Практическое занятие № 3. Погрешности машинной арифметики.
Практическое занятие № 4-5. Прямые методы решения СЛАУ.
Практическое занятие №6. Итерационные методы решения СЛАУ.
Практическое занятие № 7. Методы решения нелинейных уравнений
Практическое занятие № 8. Решение задач.
Практическое занятие № 9. Приближение функций.
Практическое занятие № 10. Численное решение задачи Коши.

Итого: 20 часов

Образцы заданий практикума

Метрика. Норма. Оператор

1. Сформулируйте определения метрики и нормы.
2. Продемонстрируйте геометрический смысл аксиом метрики, взяв множество точек декартовой координатной плоскости, а в качестве расстояния между двумя точками – длину отрезка, концами которого являются эти точки.
3. Найдите множества чисел $x \in R$, удовлетворяющих условиям: а) $\rho\ (2, x)=0.5$; б) $\rho\ (2, x)\leq 0.5$; в) $\rho\ (2, x)>0.5$. Изобразите эти множества на числовой прямой.
4. Сформулируйте определение нормы вектора и запишите формулы для нахождения нормы.

5. Выясните геометрический смысл расстояний, определенных для пространства двумерных числовых векторов R^2. Для этого рассмотрите векторы a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), которым на координатной плоскости xOy соответствуют точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2).
6. Вычислить нормы векторов
   a) $\|a\|_1$, a=(-3, 0, 4, -5) b) $\|a\|_2$, a=(2, 6, 0) c) $\|a\|_\infty$, a=(-13 , 7, -4, 8).
7. Для различных метрических пространств на множестве R^n, n-мерных числовых векторов, постройте фигуры (n=2) и поверхности (n=3), определяемые уравнением $\|x\|=1$.
8. Выясните геометрический смысл расстояния $\rho_1(f, g)$, $\rho_\Gamma(f, g)$ для элементов пространства $C_{[a,b]}$.
9. Найдите аналитически и геометрически расстояние $\rho_\Gamma(f, g)$ между заданными на отрезке [0; 1] функциями f(x)=2–2x и g(x)=x^3.
10. Сформулируйте определение нормы матрицы и запишите формулы для нахождения нормы.
11. На множестве квадратных матриц размера 3×3 посчитайте расстояния ρ_1, ρ_e, ρ_Γдля матриц A и B.
12. A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix}1&-2&1\\5&3&-2\\7&1&1\end{pmatrix}$.

Погрешности вещественных чисел

1. Дайте определение абсолютной погрешности приближенного значения вещественной величины.
2. Дайте определение относительной погрешности приближенного значения вещественной величины.
3. Определить абсолютную погрешность приближенного числа a=0.896, если относительная погрешность δa=10%.
4. Какие цифры в записи вещественного числа называют значащими?
5. Какие цифры в записи вещественного числа называют верными? Сомнительными?
6. Сколько верных цифр в числе x=12.396, если Δx=0.03?
7. Сколько значащих цифр будут верными в числе a=2.7182 при δa=1%?
8. Какова зависимость между относительной погрешностью и количеством верных значащих цифр приближенного числа?
9. Сформулируйте правило округления вещественных чисел.
10. Округлите сомнительные цифры a=0.98351±0.0052 и запишите новое приближенное значение вещественной величины a.
11. Определите, в каком случае качество вычислений выше a=$\frac{13}{19}$ ≈0.684; b= $\sqrt{52}$ ≈7.21, если приближения записаны верными в узком смысле цифрами.
12. Как определяются погрешности результатов арифметических операций над приближенными числами?
13. Заданы два вещественных числа и их абсолютные погрешности: x=2.5378, Δx=0.0001; y=2.536, Δy=0.001. Найдите абсолютные и относительные погрешности суммы и разности этих чисел. Сравните.

14. Заданы два вещественных числа и их абсолютные погрешности: $x=2.5378$, $\Delta x=0.0001$; $y=0.006$, $\Delta y=0.001$. Найдите абсолютные и относительные погрешности произведения и частного этих чисел. Сравните.

Особенности компьютерной арифметики

1. Форматы представления в памяти компьютера целых чисел.
2. Что означает утверждение о том, что целые числа в компьютерной арифметике имеют абсолютную равномерную плотность распределения и относительную неравномерную плотность распределения?
3. Основной принцип представления вещественных чисел в памяти компьютера.
4. Стандарт IEEE-754 для представления вещественных чисел на примере чисел одинарной точности.
5. Что означает утверждение о том, что вещественные числа в компьютерной арифметике имеют абсолютную неравномерную плотность распределения и относительную равномерную плотность распределения?
6. Основные числовые характеристики системы вещественных чисел конечной разрядности.
7. Изобразить числовую ось для вещественных чисел одинарной точности.
8. Алгебраические свойства системы чисел конечной точности. Для невыполняющихся свойств привести примеры.
9. Выполнение арифметических операций над числами с плавающей запятой. Продемонстрировать на примерах.

Численные методы решения задач линейной алгебры. Прямые методы

1. Назовите основные задачи линейной алгебры, решаемые численными методами.
2. Что такое прямые и итерационные методы.
3. Сформулируйте алгоритм метода Гаусса и запишите формулы для преобразования элементов матрицы на k-ом шаге прямого хода метода. Какова трудоемкость метода?
4. С какой целью применяют модификацию метода Гаусса – схему частичного выбора. Стратегии выбора ведущего элемента в методе Гаусса.
5. Применение метода Гаусса для решения других задач вычислительной алгебры.
6. Что такое LU - разложение матрицы?
7. Для каких систем уравнений применяют метод Холецкого. Сформулируйте этот алгоритм.
8. Метод прогонки с трехдиагональной матрицей: описание метода, условия его применимости и его достоинства. Трудоемкость метода прогонки.
9. Дайте определение числа обусловленности матрицы. Что такое плохо обусловленная система уравнений?
10. Сформулируйте свойства числа обусловленности.
11. Дайте оценку погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений по погрешностям входных данных.
12. Оцените количество верных значащих цифр в решении системы линейных алгебраических уравнений, если матрица системы задана точно, элементы вектора правых частей заданы с тремя верными значащими цифрами, а $\mathrm{cond}(A)=10^3$.

Практические задания

1. Решить СЛАУ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ -27 & -36 & 73 & 8 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -14 \\ 44 \\ 142 \\ -76 \end{pmatrix}.$$

2. Решить СЛАУ ***Ax***=***b*** методом LU-разложения.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ -27 & -36 & 73 & 8 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -14 \\ 44 \\ 142 \\ -76 \end{pmatrix}.$$

3. Решить СЛАУ ***Ax***=***b*** методом Холецкого.

$$A=\begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему методом прогонки.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -18 \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -40 \\ x_3 + 4x_4 = -27 \end{cases}$$

Численные методы решения задач линейной алгебры. Итерационные методы решения СЛАУ

1. Что такое итерационные методы решения СЛАУ.
2. Метод простой итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений.
3. Метод Якоби для решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Сходимость метода простой итерации.
5. Оценки погрешности, критерий окончания итераций.
6. Метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений.
7. Сходимость метода Зейделя.
8. Оценки погрешности, критерий окончания итераций в методе Зейделя.
9. Метод релаксации. Выбор параметра релаксации.

Практические задания

1. Решить систему методом Якоби с точностью 0.001.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}.$$

2. Сделать 4 итерации по методу Зейделя, предварительно преобразовав системы к виду, удобному для итерации. В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Изобразить графически поведение итерационного процесса. Проанализировать полученные результаты с точки зрения сходимости (расходимости) метода.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 - 0.5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 0.5x_2 = 1 \end{cases}$$

3. Преобразовать систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1.8x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 1.1x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7.3x_3 = 0 \end{cases}$$

Проверить выполнение достаточного условия сходимости.

Численные методы решения задачи Коши

1. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности.
2. Геометрическая интерпретация постановки задачи.
3. Расчетные формулы метода Эйлера.
4. Геометрическая интерпретация метода Эйлера.
5. Расчетные формулы модифицированного метода Эйлера.
6. Геометрическая интерпретация модифицированного метода Эйлера.
7. Расчетные формулы метода Эйлера-Коши.
8. Геометрическая интерпретация метода Эйлера-Коши.

Практические задания

1. Применяя метод Эйлера, найти приближенное решение задачи Коши в трех последовательных точках: $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$ и сравнить с точным решением $y = 0.5e^x + x + 1$

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$$

2. Для задачи Коши выполнить один шаг длины 0.2 по методу Эйлера-Коши и оценить погрешность найденного значения по правилу двойного пересчета.

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$$

3. Решите дифференциальное уравнение $y' = x^2 - y$ на отрезке [1,1.3] с шагом h=0.1 при начальном условии $y(1)=0$ модифицированным методом Эйлера.

План проведения лабораторных занятий по дисциплине

Лабораторная работа № 1. Корректность и обусловленность численного метода.
Лабораторная работа № 2. Погрешности компьютерной арифметики.
Лабораторная работа № 3. Алгебра матриц.
Лабораторная работа № 4. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений с выбором главного элемента.
Лабораторная работа № 5. Вектор невязки. Итерационное уточнение решения. Число обусловленности матрицы.
Лабораторная работа № 6. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
Лабораторная работа № 7. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
Лабораторная работа № 8. Метод релаксации решения систем линейных алгебраических уравнений.
Лабораторная работа № 9. Методы решения нелинейных уравнений.

Лабораторная работа № 10. Интерполирование функций.
Лабораторная работа № 11. Приближение функций методом среднеквадратичных приближений.
Лабораторная работа № 12. Численное интегрирование.
Лабораторная работа № 13. Численное решение задачи Коши.
Лабораторная работа № 14. Зачетное занятие

Итого: 28 часов.

Образцы заданий лабораторного практикума

Корректность и обусловленность численного метода

1. Ряд Тейлора для функции e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

сходится для всех значений аргумента *x*. Ниже приведен алгоритм вычисления приближенного значения суммы этого ряда. Суммирование заканчивается при отсутствии изменений в значении частичной суммы ряда.

Входные данные: *x*

```
// s, a, x – величины вещественного типа
s:=1
a:=x
n:=1
пока   s+a < > s
        s:=s+a
        n:=n+1
        a:=a*x/n
```

Выходные данные: *s* – приближенное значение величины e^x

Результаты вычислений по данному алгоритму для вещественных чисел *одинарной точности* для различных значений *x* представьте в виде таблицы. Вычисленные значения сравнить с e^x, вычисленным с помощью встроенной функции, также определить относительную погрешность.

x	e^x (алгоритм)	e^x(встроенная)	относительная погрешность
25			
20			
15			
10			
5			
1			
0			
–1			
–5			
–10			

–15			
–20			
–25			

2. *Продемонстрируйте* нарастание погрешности и потерю верных цифр в алгоритме вычисления e^x при таком отрицательном значении x, при котором ощутима величина погрешности (например, для вещественных чисел одинарной точности при $x = –10$ или при $x = –15$).

3. Модифицируйте алгоритм вычисления e^x с целью увеличения его устойчивости.

4. Пусть p_n – периметр правильного многоугольника, вписанного в окружность единичного диаметра, с 2n сторонами. При n=2, $p_2=2\sqrt{2}$. Рекуррентная формула вычисления p_{n+1} через p_n:

$$p_{n+1} = 2^n \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)}.$$

Вычислить значения p_n для n=3,4, …, 60. Какова при этом погрешность вычисления числа π? Попытайтесь объяснить результаты. Предложите подход к улучшению рекуррентной формулы и получению устойчивого расчетного метода.

Погрешности компьютерной арифметики

1. Вычислить $\sum_{i=1}^{n} 0.1$, используя компьютерную арифметику одинарной точности, сравнить результат с точным ответом и определить относительную погрешность результата в % при n=100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000.

2. Вычислить $\sum_{i=1}^{n} 0.125$, используя компьютерную арифметику одинарной точности при n=80, определив также относительную погрешность результата. Объясните результат. Попробуйте увеличить верхний предел суммы: n=800, 8 000, 80 000, 800 000, 8 000 000, 80 000 000, 800 000 000.

3. Вычислите выражение $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n}$ четырьмя способами: 1) суммируя последовательно слева направо; 2) слева направо все положительные и все отрицательные, затем вычитание; 3) последовательно справа налево; 4) справа налево все положительные и все отрицательные, затем вычитание. Объясните разницу в полученных результатах для достаточно больших n и определите какое из полученных значений наиболее точно приближает истинное значение конечного ряда.

Алгебра матриц

Реализовать алгоритмы матричных операций:

1. подпрограмму транспонирования матрицы

Входные данные: два целых числа n и m (n – количество строк, m – количество столбцов), матрица размерности $n \times m$
Выходные данные: транспонированная матрица размерности $m \times n$

2. подпрограмму умножения матрицы на число

Входные данные: число-множитель, два целых числа n и m (n – количество строк, m – количество столбцов), матрица размерности $n \times m$
Выходные данные: матрица – результат умножения числа-множителя на исходную матрицу

3. подпрограмму сложения матриц

Входные данные: два целых числа n и m (n – количество строк, m – количество столбцов), матрица_1 размерности $n \times m$, матрица_2 размерности $n \times m$
Выходные данные: матрица – результат сложения матриц

4. подпрограмму вычитания матриц

Входные данные: два целых числа n и m (n – количество строк, m – количество столбцов), матрица_1 размерности $n \times m$, матрица_2 размерности $n \times m$
Выходные данные: матрица – результат вычитания матриц

5. подпрограмму умножения матриц

Входные данные: три целых числа n, m и (n – количество строк матрицы_1, m – количество столбцов матрицы_1 и количество строк матрицы_2, k – количество столбцов матрицы_2), матрица_1 размерности $n \times m$, матрица_2 размерности $m \times k$
Выходные данные: матрица размерности $n \times k$ – результат умножения матриц

6. подпрограммы вычисления норм ($\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_e$, $\|\cdot\|_\infty$) матрицы

Входные данные: два целых числа n и m (n – количество строк, m – количество столбцов), матрица размерности $n \times m$
Выходные данные: соответствующая норма матрицы

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Провести вычислительный эксперимент с матрицей A из лабораторной работы №5. Принимая полученное решение x за точное, вычислить вектор

$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$, *где* $d_i = \dfrac{\left\| x - x^{(i)} \right\|_\infty}{\left\| x \right\|_\infty}, i = 1,\ldots,n$ относительных погрешностей решений $x^{(i)}$ систем с возмущенной правой частью $Ax^{(i)} = b^{(i)}$, $i=1,..,n$, где компоненты векторов $b^{(i)}$ вычисляются по формулам:

$$b_k^{(i)} = \begin{cases} b_k + \Delta, & k = i \\ b_k, & k \neq i \end{cases},\ \Delta \text{ – произвольная величина погрешности.}$$

Определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения, т.е. найти такой номер m, при котором значение d_m – максимальное. Оценить теоретически погрешность решения $x^{(m)}$ по формуле: $\delta(x^{(m)}) \le \mathrm{cond}(A) \cdot \delta(b^{(m)})$. Сравнить значение $\delta(x^{(m)})$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

2. Провести вычислительный эксперимент с матрицей A из лабораторной работы №5. Принимая полученное решение x за точное, вычислить вектор

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},\ \text{где}\ \ d_k = \frac{\left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty}{\left\| x \right\|_\infty},\ k = 1,\ldots,n$$ относительных погрешностей решений $x^{(k)}$ систем с возмущенной левой частью $A^{(k)}x^{(k)} = b$, $k=1,..,n$. Погрешность вносится в диагональный элемент матрицы A, т.е. компоненты матрицы $A^{(k)}$ вычисляются по формулам:

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ii} + \Delta \\ a_{ij}, i \neq j \end{cases},\ \Delta \text{ – произвольная величина погрешности.}$$

Определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения, т.е. найти такой номер m, при котором значение d_m – максимальное. Оценить теоретически погрешность решения $x^{(m)}$ по формуле: $\delta(x^{(m)}) \le \mathrm{cond}(A) \cdot \delta(A^{(m)})$. Сравнить значение $\delta(x^{(m)})$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

3. Дана матрица A. Найти число обусловленности матрицы, используя вычислительный эксперимент.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

. Выбрать последовательность линейно независимых векторов $b^{(i)}$, $i=1,..,k$. Решить k систем уравнений $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ $i=1, \ldots, k$, используя программный модуль, разработанный в лабораторной работе №3.

a. Для каждого найденного решения $x^{(i)}$ вычислить отношение $\dfrac{\left\| x^{(i)} \right\|}{\left\| b^{(i)} \right\|}$, $i=1, \ldots, k$.

b. Вычислить норму матрицы A^{-1} по формуле $\left\| A^{-1} \right\| \approx \max\limits_{1 \le i \le k} \dfrac{\left\| x^{(i)} \right\|}{\left\| b^{(i)} \right\|}$, вытекающей из неравенства $\|x\| \le \left\| A^{-1} \right\| \cdot \|b\|$.

c. Вычислить число обусловленности матрицы A по формуле $cond(A) \approx \|A\| \cdot \left\| A^{-1} \right\|$ и сравнить его со значением, полученным в ходе вычислительного эксперимента.

Варианты индивидуальных заданий

N	A	N	A
1	1 2 3 4 5 1 1 2 3 4	5	1 1 1 1 1 16 8 4 2 1

	1 2 1 2 3 1 3 2 1 2 1 4 3 2 1		81 27 9 3 1 256 64 16 4 1 625 125 25 5 1
2	3 1 0 0 0 1 2 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1	6	611 196 -192 407 196 899 113 -192 -192 113 899 196 407 -192 196 611
3	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 1 3 6 10 15 1 4 10 20 35 1 5 15 35 70	7	1 0.5 0.333 0.25 0.2 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111
4	1 1 1 1 8 4 2 1 27 9 3 1 64 16 4 1	8	1 1 1 1 1 2 3 4 1 3 6 10 1 4 4 20

4. Найти *LU*-разложение матрицы *A*. Решить систему уравнений *Ax*= *b* с помощью найденного разложения. Найти с помощью этого разложения обратную матрицу A^{-1}. Предусмотреть проверки.

Варианты индивидуальных заданий

№	**A**	**b**	**№**	**A**	**b**
1	3 12 -1 0 -5 2 0 32 2 0 16 -3 12 3 0 0	18 -15 0 21	5	4 2 32 0 2 30 0 -4 36 0 4 -5 0 0 11 40	-19 39 40 31
2	4 20 1 0 16 2 0 -2 -4 0 4 32 2 0 10 0	24 -13 0 7	6	4 -5 40 0 10 -4 0 50 32 0 4 -4 0 32 0 -9	19 0 34 -49
3	2 16 -3 0 -8 5 0 40 25 0 -2 3 0 -3 20 0	9 98 5 -7	7	9 40 2 0 12 -4 0 96 -4 0 64 8 36 0 0 9	81 119 -15 7
4	5 -2 32 0 4 25 0 -3 20 0 2 -7 0 0 -9 40	27 34 -28 5	8	7 -5 64 0 9 50 0 -4 0 9 -7 80 40 11 0 0	18 0 128 -19

5. Дана система уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Решить систему уравнений *Ax*= *b* методом квадратных корней (Холецкого). Промежуточный результат, U^TU-разложение матрицы *A*, выдать на экран. Найти с помощью этого разложения обратную матрицу A^{-1}. Предусмотреть проверки.

Варианты индивидуальных заданий

№	**A**	***b***	**№**	**A**	***b***	**№**	**A**	***b***
1	25 0 -5 0 9 -3	-10 51	4	1 -8 -1 -8 65 1	34 -320	7	36 30 18 30 61 15	48 -140

	-5 -3 83	552		-1 1 59	356		18 15 58	-123
	9 15 -18	-21		64 64 8	64		16 -28 -12	248
2	15 50 -60	-10	5	64 68 16	60	8	-28 65 -7	-306
	-18 -60 73	12		8 16 66	0		-12 -7 83	-610
	81 54 -18	-27		16 -8 8	-56		49 42 0	392
3	54 45 -6	-36	6	-8 40 20	-152	9	42 40 -2	338
	-18 -6 72	570		8 20 24	-148		0 -2 37	-37

6. Методом прогонки найти вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$, являющийся решением системы уравнений

$$a_k x_{k-1} + b_k x_k + c_k x_{k+1} = d_k,$$

где $k=1,2,\ldots,10$; $a_1=c_{10}=0$; коэффициенты a_k (при $k=2,3,\ldots,10$), b_k (при $k=1,2,\ldots,10$), c_k (при $k=1,2,\ldots,9$) задаются следующей таблицей:

Варианты индивидуальных заданий

№	a_k	b_k	c_k	d_k
1	k	$3.1k$	$-2k$	$\dfrac{2.1k^2+7.2k+2}{k^2+3k+2}$
2	$\dfrac{3}{k}$	$\dfrac{11}{10k}$	$\dfrac{2}{k}$	$30.5-\dfrac{41.6}{k}$
3	$2k$	$4.3k$	$-1.5k$	$\dfrac{2k^2+6.3k+1}{1.2k^2+2.3k+1}$
4	$\dfrac{2}{k}$	$\dfrac{12}{7k}$	$\dfrac{3}{k}$	$26.4-\dfrac{39.5}{k}$

Что можно сказать об устойчивости прогонки в данном конкретном случае?

7. Методом квадратных корней с точностью $\varepsilon=10^{-12}$ найти решение системы

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_j = b_j \quad (i=1,2,\ldots,6)$$

с матрицей коэффициентов вида

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} p_1 & 0.1p_1 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0.1p_1 & p_2 & 0.1p_2 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0.1p_2 & p_3 & 0.1p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1p_3 & p_4 & 0.1p_4 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0.1p_4 & p_5 & 0.1p_5 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0.1p_5 & p_6 \end{pmatrix}$$

если:

Варианты индивидуальных заданий

№	p_i ($i=1,2,\ldots,6$)	b_i ($i=1,2,\ldots,6$)	q
1	i	1	–0.5
2	$10-i$	$25-9i$	2
3	$2i$	2	–1.5
4	$9-i$	$23-8i$	3

Численное решение задачи Коши

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера, методом Эйлера-Коши, методом Рунге-Кутта4-го порядка, составив программу и получив таблицу приближенных значений и значений частного решения уравнения. Оценить абсолютные и относительные погрешности приближенных решений с помощью частного решения. Сравнить погрешности методов.

Варианты индивидуальных заданий

№	Уравнение	Начальное условие	Интервал поиска	Шаг	Частное решение
1	yў= $\frac{y}{x}$ (1 + Lny - Lnx)	$y(1) = e$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = xe^x$
2	yў- y = e^x	$y(0) = 0$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = xe^x$
3	yў= sinx + y	$y(0) = -\frac{1}{2}$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = -\frac{\sin x + \cos x}{2}$
4	2yўЧ $\sqrt{x}$ = y	y(4) = 1	[4 ; 5]	h = 0.1	$y = e^{\sqrt{x}-2}$
5	yў+ y = xy^3	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{Ч}\, e^{2x}}}$
6	xyў+ 2y = x^5y^2	$y(1) = -3$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = -\frac{3}{x^5}$
7	$y' = x^2 - y$	$y(1) = 8$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = 7e^{-x+1} + x^2 - 2x + 2$
8	yў- $\frac{3y}{x}$ = x	$y(1) = 0$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = x^3 - x^2$
9	$y' = x^2 + y$	$y(1) = 2$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = 7e^{x-1} - x^2 - 2x - 2$
10	yўx + y = - xy^2	y(2) = $\frac{1}{2\text{Ln}2}$	[2 ; 3]	h = 0.1	$y = \frac{1}{x\text{Ln}x}$
11	$y' = 2x + y$	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = 3e^x - 2x - 2$
12	yў+ ycosx = sin2x	$y(0) = -2$	[0 ; 1]	h = 0.1	y = 2(sinx - 1)
13	yў= sinx + y	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = \frac{3}{2}e^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}$
14	$y' = x^2 + y$	$y(0) = 0$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = 2e^x - x^2 - 2x - 2$
15	$y' = \cos x + y$	$y(0) = 0$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = \frac{e^x + \sin x - \cos x}{2}$
16	$y' = 2x^2 + y$	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = 5e^x - 2x^2 - 4x - 4$
17	xyў + y = Lnx + 1	$y(1) = 1$	[1 ; 2]	h = 0.1	y = Lnx + $\frac{1}{x}$
18	yў= sinx + y	$y(0) = \frac{1}{2}$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = e^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}$
19	x^2yў+ y^2 = 0	$y(1) = 1$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = \frac{x}{2x - 1}$

20	$y' = x + 2y$	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = \frac{5e^{2x} - 2x - 1}{4}$
21	$y' = 2x + 3y$	$y(0) = 1$	[0 ; 1]	h = 0.1	$y = \frac{11e^{3x} - 6x - 2}{9}$
22	$y' = \frac{y}{x}(1 + Lny - Lnx)$	$y(1) = e$	[1 ; 2]	h = 0.1	$y = xe^{x}$

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компе-тенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ОПК-1, ПК-1, ПК-8	Собеседова-ние	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе
		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.
ОПК-1, ПК-1, ПК-8	Лаборатор-ная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Лабораторная работа студенту не засчитывается если студент: 1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой пересекается пороговый показатель; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.

		Базовый (хорошо)	Если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Если студент: 1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.
ОПК-1, ПК-1, ПК-8	Разноуровневые задачи и задания	Низкий (неудовлетворительно)	Ответ студенту не зачитывается если: 1. задание выполнено менее, чем на половину; 2. студент обнаруживает незнание большей части соответствующего материала, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно излагает материал.
		Пороговый (удовлетворительно)	Задание выполнено более, чем на половину. Студент обнаруживает знание и понимание основных положений задания, но: 1. излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий; 2. не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3. излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в оформлении излагаемого.
		Базовый (хорошо)	Задание в основном выполнено. Ответы правильные, но: 1. в ответе допущены малозначительные ошибки и недостаточно полно раскрыто содержание; 2. не приведены иллюстрирующие примеры, недостаточно чётко выражено обобщающие мнение студента; 3. допущено 1-2 недочета в последовательности и оформлении излагаемого.
		Высокий (отлично)	Задание выполнено в максимальном объеме. Ответы полные и правильные. 1. студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий; 2. обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры; 3. излагает материал последовательно и правильно.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является экзамен.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на экзамене

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту:

- имеющему пробелы в знании основного материала, предусмотренного программой,
- допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий;
- не выполнившему отдельные задания, предусмотренные формами итогового или текущего контроля.

Оценка «'удовлетворительно» выставляется студенту:

- показавшему знание основного учебного материала, предусмотренного программой, в объеме, необходимом, для дальнейшей учебы и работы по специальности;
- знающему основную литературу, рекомендованную программой;
- справляющемуся с выполнением заданий, предусмотренные формами текущего контроля, но допустившему ошибки в ответе на экзамене или при выполнении экзаменационных заданий;
- обладающему необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя;

оценки «хорошо» заслуживает студент:

- показавший полное знание учебного материала, предусмотренного программой, при наличии небольших неточностей при ответе;
- успешно выполнивший все задания, предусмотренные формами текущего контроля;
- показавший систематический характер знаний по дисциплине и способность самостоятельно пополнять и обновлять знания в ходе учебы;
- усвоивший основную и имеющий представление о дополнительной литературе по дисциплине;
- знающий основные понятия по дисциплине;

Оценка «отлично» выставляется студенту:

- показавшему всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, предусмотренного программой;
- усвоившему основную и знакомому с дополнительной литературой по дисциплине;
- умеющему творчески и осознанно выполнять задания, предусмотренные программой;
- усвоившему взаимосвязь основных понятий дисциплины;
- умеющему применять их при анализе и решении практических задач;
- безупречно выполнившему в процессе изучения дисциплины все задания, предусмотренным формами текущего контроля.

6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

Примерная программа экзамена

1. Этапы решения задачи методом математического моделирования. Использование компьютера как инструмента решения задач моделирования.
2. Численные методы как раздел вычислительной математики. Предмет и метод вычислительной математики. Основные задачи численных методов.
3. Корректность задачи вычислительной математики. Обусловленность задачи вычислительной математики. Плохо обусловленная задача. Примеры.
4. Корректность задачи вычислительной математики. Устойчивость численного метода решения математической задачи. Неустойчивый метод. Примеры.
5. Расстояние, метрическое пространство. Примеры метрических пространств.
6. Норма, нормированное пространство. Примеры нормированных пространств.
7. Структура погрешности при решении задач методом математического моделирования. Примеры.
8. Погрешность. Абсолютная погрешность. Относительная погрешность. Пример (за исключением множества действительных чисел).
9. Абсолютная и относительная погрешности вещественных чисел. Округление вещественных чисел, погрешность округления. Верные и значащие цифры в записи вещественного числа. Связь относительной погрешности с количеством верных значащих цифр вещественного числа.
10. Погрешность арифметических действий над вещественными числами. Прямая и обратная задачи теории погрешностей (на множестве действительных чисел).
11. Представление чисел в памяти компьютера. Представление вещественных чисел в памяти компьютера в соответствии со стандартом IEEE-754.
12. Основные числовые характеристики системы вещественных чисел конечной разрядности. Выполнение арифметических операций над вещественными числами с плавающей точкой. Алгебраические особенности системы чисел конечной точности. Примеры.
13. Основные алгебраические задачи, решаемые численными методами. Классификация численных методов решения алгебраических задач. Метод Крамера решения СЛАУ и его трудоемкость. Вектор невязки. Итерационное уточнение приближенного решения, полученного прямыми методами.
14. Метод Гаусса решения СЛАУ и его применение к вычислению определителя матрицы и нахождению обратной матрицы.
15. Метод LU-разложения решения СЛАУ.
16. Метод квадратных корней решения СЛАУ.
17. Метод прогонки решения СЛАУ.
18. Число обусловленности матрицы. Свойства числа обусловленности. Оценка погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений по погрешностям входных данных.
19. Метод простой итерации решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации. Достаточное условие сходимости метода простой итерации. Условие окончания итерационного процесса.
20. Метод Якоби решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условие сходимости метода Якоби. Достаточное условие сходимости метода Якоби. Условие окончания итерационного процесса в методе Якоби.
21. Метод Зейделя решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условие сходимости метода Зейделя. Достаточное условие сходимости метода Зейделя.
22. Постановка задачи решения нелинейного уравнения, геометрическая интерпретация. Этапы численного решения нелинейного уравнения. Метод половинного деления для

решения нелинейного уравнения с одним неизвестных. Оценка погрешности и критерий окончания итерационного процесса.

23. Метод хорд для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности и критерий окончания итерационного процесса.
24. Метод касательных для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности и критерий окончания итерационного процесса.
25. Комбинированный метод для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности и критерий окончания итерационного процесса.
26. Метод простой итерации для решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Теорема о достаточном условии сходимости метода простой итерации решения нелинейного уравнения. Геометрические интерпретации сходящейся итерационной последовательности.
27. Достаточное условие расходимости метода простой итерации решения нелинейного уравнения. Геометрические интерпретации расходящейся итерационной последовательности. Оценка погрешности и критерий окончания итерационного процесса.
28. Постановка задачи решения систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации решения систем нелинейных уравнений. Достаточное условие сходимости метода простой итерации.
29. Постановка задачи решения систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.
30. Аппроксимация функций. Кусочно-линейная интерполяция. Геометрическая интерпретация. Задачи экстраполирования и обратного интерполирования.
31. Аппроксимация функций. Полиномиальное интерполирование. Доказательство единственности интерполяционного полинома n-ой степени, построенного по n+1 узлу интерполяции. Построение полинома в форме Лагранжа.
32. Аппроксимация функций. Интерполяция сплайнами.
33. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов. Приближение в линейном виде. Геометрическая интерпретация.
34. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов. Приближение в нелинейном виде. Геометрическая интерпретация.
35. Численное интегрирование. Метод левых и центральных прямоугольников. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности.
36. Численное интегрирование. Метод правых и центральных прямоугольников. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности.
37. Численное интегрирование. Метод трапеций. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности.
38. Численное интегрирование. Метод Симпсона. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности.
39. Численное интегрирование. Метод Гаусса.
40. Численное интегрирование. Метод Монте-Карло.
41. Метод Эйлера для решения задачи Коши. Геометрическая интерпретация метода.
42. Модифицированный метод Эйлера для решения задачи Коши. Геометрическая интерпретация метода.
43. Метод Эйлера-Коши для решения задачи Коши. Геометрическая интерпретация метода.
44. Метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши. Геометрическая интерпретация метода.
45. Методы решения дифференциальных уравнений высокого порядка.
46. Методы решения систем дифференциальных уравнений.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- официальный сайт БГПУ;
- корпоративная сеть БГПУ;
- система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- электронные библиотечные системы;
- мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учеб.пособие. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2011. – 664 с. (25 экз).
2. Исаков В.Н. Элементы численных методов : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по спец. "Математика" / В.Н. Исаков. – М. : ACADEMIA, 2003. – 188, с. – (39 экз.).
3. Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений : учебник и практикум для вузов / В. Е. Зализняк. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 356 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02714-3. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468584 (дата обращения: 10.10.2022).
4. Лапчик, М.П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по спец. "Информатика" / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер. – М. : Академия, 2004. – 383, [1] с. – (Высшее профессиональное образование). (24 экз.)
5. Пантина, И.В. Вычислительная математика : учебник / И. В. Пантина, А. В. Синчуков (Университетская серия). – М. : Маркет ДС, 2010. (5 экз)
6. Численные методы : учебник и практикум для вузов / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. –

421 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03141-6. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/488879 (дата обращения: 10.10.2022).
7. Федченко, Г.М. Численные методы : курс лекций / Г.М. Федченко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, БГПУ. – Благовещенск : [Изд-во БГПУ], 2005. – 178 с. (12 экз.)

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Бояршинов, Б. Численные методы. – Национальный открытый университет «Интуит». Режим доступа : https://intuit.ru/studies/courses/2317/617/lecture/13403
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». – Режим доступа : http://www.window.edu.ru/
3. Сайт Государственного научно-исследовательского институт информационных технологий и телекоммуникаций. – Режим доступа : http://www.informika.ru.
4. Интернет-Университет Информационных Технологий. – Режим доступа : https://intuit.ru
5. Научно-образовательный Интернет-ресурс по численному анализу – Режим доступа : http://num-anal.srcc.msu.ru/
6. Интернет-журнал "Вычислительные методы и программирование" – Режим доступа : http://num-meth.srcc.msu.ru/

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». – Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). – Режим доступа: https://polpred.com/news

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером(рами) с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутатором для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Для проведения лабораторных работ также используется компьютерный класс, укомплектованная следующим оборудованием:

- Комплект компьютерных столов.
- Стол преподавателя
- Пюпитр
- Аудиторная доска
- Компьютеры с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением
- Мультимедийный проектор
- Экспозиционный экран
- Учебно-наглядные пособия - мультимедийные презентации по дисциплине.

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ, в лаборатории психолого-педагогических исследований и др.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; математический пакет MatLab.

Разработчик: Федченко Г.М., кандидат педагогических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2020/2021 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2020/2021 уч. г. на заседании кафедры информатики и методики преподавания информатики (протокол № 8 от «17» июня 2020 г.). В РПД внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением: Титульный лист	
Исключить:	Включить:
Текст: Министерство науки и высшего образования РФ	Текст: Министерство просвещения Российской Федерации

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2021/2022 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2021/2022 уч. г. без изменений на заседании кафедры информатики и методики преподавания информатики (протокол №7 от 21.04.2021 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2022/2023 уч. г.

РПД пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022/2023 учебном году на заседании кафедры информатики и методики преподавания информатики (протокол №1 от 21 сентября 2022 г.).

В рабочую программу внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением: 28-29	
В Раздел 9 внесены изменения в список литературы, в базы данных и информационно-справочные системы, в электронно-библиотечные ресурсы. Указаны ссылки, обеспечивающие доступ обучающимся к электронным учебным изданиям и электронным образовательным ресурсам с сайта ФГБОУ ВО «БГПУ».	

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2024/2025 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. без изменений на заседании кафедры информатики и методики преподавания информатики (протокол №8 от 30.05.2024 г.).