МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»

ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана физико-математического факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»

_______________ О.А. Днепровская
«22» мая 2019 г.

Рабочая программа дисциплины

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ В ПРОФИЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Направление подготовки
44.04.01 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Профиль
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

Уровень высшего образования
МАГИСТРАТУРА

Принята на заседании кафедры физического и математического образования
(протокол № 9 от 15 мая 2019 г.)

Благовещенск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: углубление и систематизация знаний в области элементарной математики и развитие умений использовать различные методы и приемы решения задач повышенной трудности углубленного курса школьной математики.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Практикум по решению задач по математике повышенной трудности в профильной школе» относится к дисциплинам вариативной части, формируемой участниками образовательных отношений блокаБ1. В.02.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: УК-5; ОПК-8; ПК-1:

УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия, **индикаторами** достижения которой является:

УК-5.3 Умеет толерантно и конструктивно взаимодействовать с людьми с учетом их социокультурных особенностей в целях успешного выполнения профессиональных задач и усиления социальной интеграции.

ОПК-8.Способен проектировать педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний и результатов исследований.,**индикаторами** достижения которой является:

- ОПК-8.3 Владеет методами, формами и средствами педагогической деятельности, осуществляет их выбор в зависимости от контекста профессиональной деятельности с учетом результатов научных исследований.

ПК-1. Способен организовывать и реализовывать процесс обучения дисциплинам предметной области профиля магистратуры в образовательных организациях соответствующего уровня образования,**индикаторами** достижения которой является:

- ПК-1.3 Владеет предметным содержанием, методикой обучения дисциплинам предметной области профиля магистратуры в образовательных организациях соответствующего уровня образования; современными методами и технологиями обучения с учетом социальных, возрастных, психофизиологических и индивидуальных особенностей обучаемых в образовательных организациях разного уровня.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и строгие доказательства теоретических фактов основных тем дисциплины;

уметь:

- применять теоретические знания к решению нестандартных задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;

- планировать работу по изучению дополнительных глав математики в профильных классах;

владеть:

– различными приемами и методами решения нестандартных задач (задач с параметрами, комбинированных неравенств) элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
– техникой применения частных математических методов к решению задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
– теорией и практикой геометрии треугольника и других плоских фигур;

- различными приемами и методами измерения и вычисления площадей плоских фигур и применением метода площадей к вычислению элементов плоских геометрических фигур.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины«Практикум по решению задач по математике повышенной трудности в профильной школе» составляет 5 зачетных единиц (далее – ЗЕ)(180 часов).

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	**Всего часов**	**Семестр 2**
Общая трудоемкость	180	180
Аудиторные занятия	38	38
Лекции	6	6
Практические занятия	32	32
Самостоятельная работа	106	106
Вид итогового контроля	36	экзамен

2.УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

	Наименование модулей и тем	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические	
1.	Задачи с параметрами	37	1	10	26
2.	Комбинированные неравенства.	37	1	10	26
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	34	2	6	26
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	36	2	6	28
	Всего	144	6	32	106

Интерактивное обучение по дисциплине

Тема	Форма занятий	Интерактивная форма организации учебной работы	Кол-во часов
Комбинированные неравенства.	ПР	Работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств.	2
Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	ПР	Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи.	4
Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	ПР	1) Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. 2) Работа в парах: обсуждение способов решения задач.	2 2
ВСЕГО:			**10**

2.2 Заочная форма обучения
Учебно-тематический план

	Наименование модулей и тем	Всего часов	Виды учебных занятий		
			Лекции	Практические	Самостоятельная работа
1.	Задачи с параметрами	22		2	20
2.	Комбинированные неравенства.	22		2	20
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	25	1	2	22
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	30	1	4	25
	Всего	99+9	2	10	87

Интерактивное обучение по дисциплине

Тема	Форма занятий	Интерактивная форма организации учебной работы	Кол-во часов
Комбинированные неравенства.	ПР	Работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств.	1
Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	ПР	Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи.	1
Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	ПР	1) Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. 2) Работа в парах: обсужде-	1 1

		ние способов решения задач.	
ВСЕГО:			**4**

3. СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Задачи с параметрами

Параметр. Двойственная природа параметра. Параметр и поиск решений. Параметр и количество решений. Параметр и свойства решений. Аналитическ4ие способы решения задач с параметрами. Свойства функций в задачах с параметрами. Графические приёмы решения задач с параметрами: пересечение линий, параллельный перенос, поворот, система координат (a,x), метод областей.

Тема 2. Комбинированные неравенства

Рациональные неравенства, метод интервалов. Примеры решений. Модуль математического выражения. Виды неравенств с модулем, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений неравенств с модулем. Иррациональные неравенства, их основные виды, алгоритмы решения иррациональных неравенств. Метод замены множителя. Примеры решения иррациональных неравенств. Показательные неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Логарифмические неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений показательных и логарифмических неравенств. Тригонометрические неравенства, простейшие тригонометрические неравенства, алгоритмы их решения. Методы решения тригонометрических неравенств. Примеры решений. Трансцендентное неравенство, комбинированное неравенство. Методы решения комбинированных неравенств. Метод рационализации, метод постановки. Применение свойств функций при решении комбинированных неравенств. Системы трансцендентных и комбинированных неравенств. Примеры решений неравенств и их систем.

Тема 3. Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи

Определение, виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами треугольника: теорема косинусов, теорема синусов. Медианы, биссектрисы, высоты треугольника, точки их пересечения. Свойства замечательных линий и точек треугольника. Средняя линия треугольника, ее свойства. Вписанные и описанные треугольники. Прямоугольный треугольник, соотношение между сторонами и углами, свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника, проведенных к гипотенузе. Равные и подобные треугольники, их признаки. Формулы для вычисления площади треугольника. Площадь подобных треугольников.

Параллелограмм: определение, свойства, признаки. Метрическое свойство диагоналей параллелограмма. Прямоугольник: определение, свойства, признаки. Ромб: определение, свойства, признаки. Квадрат. Трапеция. Равнобокая трапеция, ее свойства. Средняя линия трапеции. Пропорциональные отрезки в трапеции. Вписанные и описанные четырехугольники, их признаки. Формулы для вычисления площадей четырехугольников.

Тема 4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур

Определение окружности, длина окружности, длина дуги окружности. Определение круга, площадь круга, площадь сектора. Касательная к окружности, свойства касательных, свойства касательной и секущей, свойства хорд. Центральный угол, вписанный угол, их свойства; угол между хордой и касательной. Метод вспомогательной окружности.

Касающиеся окружности: внутреннее и внешнее касание. Свойства общей касательной. Пересекающиеся окружности. Окружность, вписанная в треугольник; окружность, описанная около треугольника; их центры, формулы для вычисления радиусов. Окружность, вписанная в четырехугольник; окружность, описанная около четырехугольника; положение их центра. Правильные многоугольники, их вписанные и описанные окружности, вычисление радиусов этих окружностей. Вневписанные окружности.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Общие методические рекомендации

Согласно учебного плана организация учебной деятельности по дисциплине «Практикум по решению задач по математике повышенной трудности в профильной школе» предусматривает следующие формы: лекция, практическое занятие, самостоятельная работа. Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, тщательной подготовки к практическим занятиям, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

4.2 Методические рекомендации по подготовке к лекциям

Курс лекций строится на основе четких понятий и формулировок, так как только при таком походе студенты приобретают культуру абстрактного мышления, необходимую для высококвалифицированного специалиста в любой отрасли знаний, а также на разборе типовых задач и алгоритмов их решения. Необходимо избегать механического записывания текста лекции без осмысливания его содержания.

4.3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; разобрать решение предлагаемых на лекциях задач.

4.4. Методические указания к самостоятельной работе студентов

Для успешного усвоения дисциплины необходима правильная организация самостоятельной работы студентов. Эта работа должна содержать:

–проработку теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованной литературе;

–подготовку к практическим занятиям, в том числе выполнение домашних заданий;

–подготовку к решению расчетно-графической работы и ее успешное выполнение.

В качестве образца решения задач следует брать те решения, которые приводились преподавателем на лекциях или выполнялись на практических занятиях. При появлении каких-либо вопросов следует обращаться к преподавателю в часы его консультаций. Критерием качества усвоения знаний могут служить аттестационные оценки по дисциплине и текущие оценки, выставляемые преподавателем в течение семестра. Также при подготовке к решению расчетно-графической работы следует просмотреть конспект практических занятий и выделить в практические задания, относящиеся к данному разделу. Если задания на какие-то темы не были разобраны на занятиях (или решения которых оказались не понятыми), следует обратиться к учебной литературе, рекомендованной преподавателем в качестве источника сведений. Полезно при подготовке к решению расчетной работы самостоятельно разбирать решения типичных заданий по соответствующему разделу в методической литературе.

4.5. Методические указания к зачету (экзамену)

Подготовку к зачету (экзамену) наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения которых должен владеть студент. При подготовке к занятиям и зачету (экзамену) студенты могут использовать литературу, приведенную в списке литературы и имеющийся лекционный материал, кроме того по темам лекций дополнительно рекомендуется изучить представленную литературу. Зачёт (экзамен) проводится в форме письменной контрольной работы, демонтсрационный вариант которой приведён в программе.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине
для очного обучения

№	Наименование раздела (темы)	Формы/видысамостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Задачи с параметрами	решение задач ДЗ и ИЗ	26
2.	Комбинированные неравенства.	решение задач ДЗ и ИЗ	26
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	решение задач ДЗ и ИЗ	26
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	решение задач ДЗ и ИЗ	28
	ИТОГО		**106**

для заочного обучения

№	Наименование раздела (темы)	Формы/видысамостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Задачи с параметрами	решение задач ДЗ и ИЗ	20
2.	Комбинированные неравенства.	решение задач ДЗ и ИЗ	20
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	решение задач ДЗ и ИЗ	22
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	решение задач ДЗ и ИЗ	25
	ИТОГО		**87**

5.ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ В УСЛОВИЯХ ОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Практическое занятие 1. Задачи с параметрами. Аналитические способы решения

План

1. Параметр и поиск решений.
2. Параметр и количество решений.
3. Параметр и свойства решений.
4. Свойства функций в задачах с параметрами.

Задачи, предлагаемые для решения

1) Решите уравнение при всех значениях параметра a:
   a. $(a-5)x^2+3ax-(a-5)=0$,
   b. $(4-a)x^2-6ax+3=0$
2) При каких значениях a уравнение $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ имеет хотя бы одно решение?
3) Найдите все значения a, при которых неравенство не имеет решений.
   a. $x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$,
   b. $ax^2-3x+a\le 0$
4) Найдите все значения m, при которых решением неравенства является любое действительное число?
   a. $x^2-mx+(3-m)>0$,
   b. $ax^2-2ax+1>0$
5) Найдите все значения a, при каждом их которых из неравенства $0\le x\le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\le 0$.
6) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-4)\ge(a+2)(|x-2|-2)$ включает все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна 0,5.
7) Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|$ больше 1.
8) Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-6x+5|$ больше 1.
9) Найдите наибольшее значение а, при котором уравнение $x^3+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (11): II.70 – II.90, II.120 – II.123, II.141 – II.145, II.168 – II. 172.

Рекомендуемая литература: 1, 4, 11, 13 (из списка).

Практическое занятие 2. Задачи с параметрами. Графические приемы решения

План

1. Пересечение линий.
2. Параллельный перенос.
3. Поворот.
4. Система координат (a,x).

Задачи, предлагаемые для решения

1) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x^4+1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ имеет единственное решение.
2) Найдите все a, при которых система $\begin{cases} x^2 + (8a+4)x + 7a^2 + 4a < 0, \\ x^2 + a^2 = 16. \end{cases}$ имеет решения.
3) При каких значениях a система имеет единственное решение $\begin{cases} \log_2(a+x) \le 1, \\ |a-x| \le 1. \end{cases}$
4) Найдите все значения параметра b, при которых корни уравнения существуют и принадлежат отрезку [2;17]: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = b$.
5) Найдите все значения p, при которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет корней.
6) При каких значениях a число корней уравнения $|x^2 - 8|x| + 7| = a$ равно a.
7) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.
8) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.
9) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \le |x + 3|$ образует отрезок длиной 1.
10) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \le |x - 4|$ образует отрезок длиной 1.
11) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2|2|x| - a^2| = x - a$ имеет три различных решения.
12) При каких значениях параметра a уравнение $(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 2x) = 0$ имеет ровно три корня.
13) При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ имеет ровно три корня?
14) Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases} x^2 + 2x + a \le 0, \\ x^2 - 4x - 6a \le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.
15) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \ge 0, \\ ax \ge 4 \end{cases}$ не имеет решений.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (11): II.211 – II.221, II.249 – II.260, II.324 – II.340.

Рекомендуемая литература: 1, 4, 11, 13 (из списка).

Практическое занятие 3. Задачи с параметрами

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Решение заданий. Обсуждение методов решения. Презентация наиболее интересных решений.

Примерное задание для группы

1) Найдите сумму значений k или значение k, если оно единственное, для которых сумму корней уравнения $x^2 + (k^2 + 2k - 3)x + 2k + 5 = 0$ равна 0.
2) При каком a в квадратном уравнении $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.
3) При каком a в квадратном уравнении $(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$ один корень в два раза больше другого?
4) При каких значениях a парабола $y = 4ax^2 - 8x + 25$ имеет с осью Ox две общие точки?

5) При каких значениях а квадратный трёхчлен $ax^2 + 8x + 5$ имеет только отрицательные значения?
6) При каких значениях k парабола $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7$ касается оси Ox?
7) При каких а квадратный трёхчлен $x^2 - 2(a-1)x + 4$ можно представить в виде полного квадрата?
8) При каких значениях а квадратный трёхчлен $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6$ принимает только положительные значения?
9) При каких значениях а оба корня квадратного трёхчлена $x^2 + 6ax + 2 - 2a + 9a^2$ больше 3?
10) При каких значениях а уравнение $(x-4)|x| - 1 - a = 0$ имеет три корня?
11) При каких значениях а уравнение $|x|(x-1) - a = 0$ имеет только один корень?
12) При каких целых значениях а уравнение $x^2(x-4) + a = 0$ имеет ровно три корня.
13) Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} \geq ax + 2 - \sqrt{\frac{x+1}{5-x}}$ не имеет решений.
14) Для каждого действительного значения параметра а решите неравенство $x + 2a \geq 3\sqrt{ax}$
15) Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-4) \geq (a+2)(|x-2|-2)$ включает все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна 0,5.

Рекомендуемая литература: 1, 4, 11, 13 (из списка).

Практическое занятие 4. Комбинированные неравенства

План

1. Решение комбинированных неравенств способом подстановки.
2. Использование свойств функции (монотонности, ограниченности, четности (нечетности), периодичности) при решении комбинированных неравенств.
3. Решение неравенств методом рационализации.
4. Решение систем неравенств.

Задачи, предлагаемые для решения

(6), стр. 50 № 9-38, 42-53; стр. 52 № 58-60.

Задания для самостоятельной работы

Чётные номера из предложенных выше решить самостоятельно.

Рекомендуемая литература: 1, 4, 6, 13, 19 (из списка).

Практическое занятие 5. Комбинированные неравенства

Проводится в интерактивной форме (работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств).

Задание для самостоятельной работы в парах

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1<0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x+2x-4}{x-1}\le 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x}\ge 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1}\ge |x+2|.$$

7. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\le 0.$$

Рекомендуемая литература: 1, 4, 6, 13, 19 (из списка).

Практическое занятие 6. Геометрия треугольника. Замечательные линии и точки треугольника. Исследовательские задачи

План

1. Медиана треугольника, свойства точки пересечения. Медиана прямоугольного треугольника.
2. Биссектриса треугольника, её свойства.
3. Свойства высот треугольника и точки их пересечения.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами т и п. Найдите стороны треугольника.*
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.
3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.
4. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.
5. В четырёхугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с серединой M отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$, AP = 1. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника ABCD можно описать окружность. Указание. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону BC. Тогда точки M, P и H лежат на одной прямой, а треугольник PHC подобен треугольнику APD.
6. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите площадь

трапеции. Указание. Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

7. *Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.*
8. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.
9. *Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.*
10. В треугольнике ABC известно, что AB = c, AC = b (b>c), AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE. Указание. Соедините точку D с серединой отрезка AE.
11. *Точка E лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC; точка К — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD. Указание. Точки B, C, D, К и точка пересечения прямых AB и DE лежат на окружности с диаметром BD.*
12. В трапеции ABCD точка К — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен 60°, а периметр равен 30.
13. *Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S, а углы равны α, β и γ.*
14. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным 30°, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
15. *В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.*
16. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.*
17. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH = AB. Найдите угол ACB.*
18. В треугольнике ABC известно, что AB = 2, AC = 5, BC = 6. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот.
19. *На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.*
20. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CM и AN. Известно, что AC = 2, а площадь круга, описанного около треугольника MBN, равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой CM и стороной BC.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 7. Геометрия треугольника. Отношение отрезков и площадей

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Поиск рациональных способов решения исследовательских задач. Презентация наиболее интересных способов решения.

Задачи, предлагаемые для решения в малых группах

1. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.
2. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.
3. В треугольник ABC со сторонами AB = 6, BC = 5, AC = 7 вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC. Указание. Точка M — середина высоты BH.
4. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC в большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите MB, если MA = a, MD = b. Указание. AM — биссектриса угла BAC, треугольники ABM и BDM подобны.
5. Пятиугольник ABCDE вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE. Указание. Пусть точки K, L, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Треугольники AKL и ANM подобны.
6. При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой шесть точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают пять равных отрезков?
7. В трапеции ABCD с боковыми сторонами AB = 9 и CD = 5 биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках Mи N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причём точка K лежит на основании AD. а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC? б) Найдите отношение MN: KL, если LM: KN = 3:7.
8. Из точки A проведены две касательные (M и N — точки касания, O — центр окружности) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P. Известно, что AB: BC = = 2:3. Найдите AP:PC. Указание. Пусть D и E — середины хорд MN и BC соответственно. Тогда AP • AE = AD • AO = AM^2= AB • AC.
9. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых—треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.
10. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2. Найдите AC.
11. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, B_1 и A_1 причём треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний. От-

резок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причём $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 8. Четырехугольники. Исследовательские задачи

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Поиск рациональных способов решения исследовательских задач. Презентация наиболее интересных способов решения.

Примерный список задач, предлагаемых для решения в малой группе:

1. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.
2. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма ABCD как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.
3. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами. Указание. Отрезок, соединяющий вершины данных равнобедренных треугольников, проходит через центр параллелограмма.
4. Точки M, K, N и L — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника ABCDE, P и Q — середины отрезков MN и KL соответственно. Известно, что PQ = 1. Найдите сторону AE. Указание. Пусть F — середина AD. Тогда MKNF — параллелограмм, PQ — средняя линия треугольника KFL, а FL — средняя линия треугольника ADE.
5. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. 4 Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно $\frac{4}{3}$R.
6. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.
7. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна её площадь?
8. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.
9. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.
10. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите стороны трапеции, если её высота равна 12, а длины биссектрис равны 15 и 13.
11. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 2 и основанием BC = 5. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.
12. Дана трапеция ABCD, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30°. Известно, что ∠BAC = ∠CDB, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

13. Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 9. Окружность. Круг. Отрезки и углы, связанные с окружностью

План

1. Касательная к окружности.
2. Пропорциональные отрезки в окружности.
3. Углы, связанные с окружностью. Метод вспомогательной окружности.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C и через неё проведена третья касательная KL, образующая с касательными MA и MB треугольник KLM. Найдите периметр этого треугольника.
2. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.
3. *Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.*
4. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезков O_1O_2 и M_1M_2равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите O_1O_2.
5. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2равно$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2.
6. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.*
7. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.
8. Найдите длину хорды, если дан радиус r окружности и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.
9. *Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно*$\sqrt{3}$.
10. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC — в точке E. Найдите AE, зная, что AK = KB = a, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.
11. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём AD = $\frac{2}{3}$AB. Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 1.
12. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если AB = BC = 3 и AC = 4.

13. *Окружность, диаметр которой равен$\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины Аи В прямоугольника ABCD. Длина касательной, проведённой из точки С к окружности, равна 3, АВ = 1. Найдите сторону ВС.*
14. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника MNPQ. Длина касательной, проведённой из точки Q к окружности, равна 1, PQ = 2. Найдите площадь прямоугольника MNPQ, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.
15. Окружность, проходящая через вершины В, С и D параллелограмма ABCD, касается прямой AD и пересекает прямую АВ в точках В и Е. Найдите АЕ, если AD = 4 и СЕ = 5.
16. Из точки А, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие АКС и ALB, угол между которыми равен 30° (К, С, L, В — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника АВС равна 10.
17. На прямой расположены точки А, В, С и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что ВС = 3, АВ = 2CD. Через точки Аи С проведена некоторая окружность, а через точки В и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок ВС в точке К. Найдите ВК.
18. В равнобедренном треугольнике АВС (АВ = АС) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите ВС, если известно, что АС = 1, а вершина А лежит на окружности, проходящей через точки D, Е и F.
19. Окружность касается сторон АВ и AD прямоугольника ABCD и проходит через вершину С. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции ABND, если АВ = 9 и AD = 8.
20. На одной из сторон угла, равного α (α< 90°), с вершиной в точке О взяты точки А и В, причём ОА = а, ОВ = b. Найдите радиус окружности, проходящей через точки А и В и касающейся другой стороны угла.
21. На катете АС прямоугольного треугольника АВС как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу АВ в точке Е. На стороне ВС взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причём отрезки EF и АС параллельны, BG = 2CG и АС =$2\sqrt{3}$. Найдите GF.
22. В параллелограмме ABCD угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину А, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.
23. Окружность и прямая касаются в точке М. Из точек А и В этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные а и b соответственно. Найдите расстояние от точки М до прямой АВ.
24. *Равнобедренная трапеция с основаниями AD и ВС (AD >ВС) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке М. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение AD к ВС, если AN: NM = к.*
25. *В трапеции ABCD с основаниями AD и ВС угол А равен 45°, угол D равен 60°. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках М и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке Е. Найдите отношение АЕ :ED.*
26. В треугольнике АВС проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке О. Известно, что ОЕ = 1, а вершина С лежит на окружности, проходящей через точки Е, D и О. Найдите стороны и углы треугольника EDO.
27. *В треугольнике АВС угол В прямой, величина угла А равнаα, точка D — середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке С относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.*
28. В выпуклом четырёхугольнике ABCD проведены диагонали АС и BD. Известно, что AD = 2, ∠ABD = ∠ACD = 90°, а расстояние между центрами окружностей, вписан-

ных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC. Указание. Из центров O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, отрезок AD виден под одним и тем же углом. Центр окружности, проходящей через точки O_1,O_2, A и D, лежит на описанной окружности четырёхугольника ABCD.

29. *В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что MN = BC и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC. Указание. Рассмотрите два случая: угол B тупой или острый. Точки M, N и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности.*
30. *В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB. Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON соответственно в точках P и Q. Найдите PQ, если MN = 2.*

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 10. Комбинации окружностей, окружностей и плоских фигур. Исследовательские задачи

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Поиск рациональных способов решения исследовательских задач. Презентация наиболее интересных способов решения.

Примерный список задач, предлагаемых для решения в малой группе:

1. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AB = 4.
2. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
3. Две окружности радиусов R и r (R>r) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где Aи B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.
4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.
5. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
6. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
7. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если OC = 2,OD =$\sqrt{3}$.
8. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна$\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.

9. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольникаABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
10. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 11. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и плоских фигур

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в парах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Презентация наиболее интересных случаев.

Примерный список задач, предлагаемых для решения:

1. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AB = 4.
2. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
3. Две окружности радиусов R и r ($R>r$) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где Aи B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.
4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.
5. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
6. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
7. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если OC = 2,OD =$\sqrt{3}$.
8. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна$\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.

9. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольникаABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
10. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

5.2 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ В УСЛОВИЯХ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Практическое занятие 1. Задачи с параметрами. Аналитические способы решения

План

1. Параметр и поиск решений.
2. Параметр и количество решений.
3. Параметр и свойства решений.
4. Свойства функций в задачах с параметрами.
5. Аналитические и геометрические способы решения.

Задачи, предлагаемые для решения

1) Решите уравнение при всех значениях параметра a:
   a. $(a-5)x^2+3ax-(a-5)=0$,
   b. $(4-a)x^2-6ax+3=0$
2) При каких значениях a уравнение $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ имеет хотя бы одно решение?
3) Найдите все значения a, при которых неравенство не имеет решений.
   a. $x^2+(2a+4)x+8a+1\leq 0$,
   b. $ax^2-3x+a\leq 0$
4) Найдите все значения m, при которых решением неравенства является любое действительное число?
   a. $x^2-mx+(3-m)>0$,
   b. $ax^2-2ax+1>0$
5) Найдите все значения a, при каждом их которых из неравенства $0\leq x\leq 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\leq 0$.
6) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-4)\geq(a+2)(|x-2|-2)$ включает все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна 0,5.
7) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|$ больше 1.
8) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-6x+5|$ больше 1.
9) Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.
10) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$ имеет единственное решение.
11) Найдите все a, при которых система $\begin{cases} x^2+(8a+4)x+7a^2+4a<0, \\ x^2+a^2=16. \end{cases}$ имеет решения.
12) При каких значениях a система имеет единственное решение $\begin{cases} \log_2(a+x)\leq 1, \\ |a-x|\leq 1. \end{cases}$
13) Найдите все значения параметра b, при которых корни уравнения существуют и принадлежат отрезку [2;17]: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=b$.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (11): II.70 – II.90, II.120 – II.123, II.141 – II.145, II.168 – II. 172.

Рекомендуемая литература: 1, 4, 11, 13, 19 (из списка).

Практическое занятие 2. Комбинированные неравенства

План (1 час)

1. Решение комбинированных неравенств способом подстановки.
2. Использование свойств функции (монотонности, ограниченности, четности (нечетности), периодичности) при решении комбинированных неравенств.
3. Решение неравенств методом рационализации.
4. Решение систем неравенств.

Задачи, предлагаемые для решения

(6), стр. 50 № 9-38, 42-53; стр. 52 № 58-60.

Интерактивная форма (1 час)

Задание для самостоятельной работы в парах

1. Решите неравенство
$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$$
2. Решите неравенство
$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0.$$
3. Решите неравенство
$$\frac{4^x+2x-4}{x-1} \le 2.$$
4. Решите неравенство
$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \ge 1.$$
5. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$
6. Решите неравенство
$$\frac{3}{|x+3|-1} \ge |x+2|.$$
7. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \le 0.$$

Рекомендуемая литература: 1, 4, 6, 13 (из списка).

Практическое занятие 3. Геометрия треугольника. Замечательные линии и точки треугольника. Исследовательские задачи

План (1 час)

1. Медиана треугольника, свойства точки пересечения. Медиана прямоугольного треугольника.
2. Биссектриса треугольника, её свойства.
3. Свойства высот треугольника и точки их пересечения.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Интерактивная форма (1 час)

Задания для самостоятельной работы в малых группах

1. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами тип. Найдите стороны треугольника.*

2. *Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.*
3. *Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.*
4. *Точка E лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD. Указание. Точки B, C, D, K и точка пересечения прямых AB и DE лежат на окружности с диаметром BD.*
5. *Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S, а углы равны α, β и γ.*
6. *В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.*
7. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.*
8. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH = AB. Найдите угол ACB.*
9. *На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.*

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 4. Окружность. Круг. Отрезки и углы, связанные с окружностью

План

1. Касательная к окружности.
2. Пропорциональные отрезки в окружности.
3. Углы, связанные с окружностью. Метод вспомогательной окружности.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C и через неё проведена третья касательная KL, образующая с касательными MA и MB треугольник KLM. Найдите периметр этого треугольника.
2. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.
3. *Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.*
4. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезков O_1O_2 и M_1M_2равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите O_1O_2.

5. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2равно$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2.
6. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.*
7. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.
8. Найдите длину хорды, если дан радиус r окружности и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.
9. *Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно$\sqrt{3}$.*
10. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC — в точке E. Найдите AE, зная, что AK = KB = a, ∠BCK = α, ∠CBE =β.
11. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём AD = $\frac{2}{3}$AB. Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 1.
12. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если AB = BC = 3 и AC = 4.
13. *Окружность, диаметр которой равен$\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины Aи B прямоугольника ABCD. Длина касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, AB = 1. Найдите сторону BC.*
14. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника MNPQ. Длина касательной, проведённой из точки Q к окружности, равна 1, PQ = 2. Найдите площадь прямоугольника MNPQ, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.
15. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма ABCD, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если AD = 4 и CE = 5.
16. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.
17. На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что BC = 3, AB = 2CD. Через точки Aи C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K. Найдите BK.
18. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что AC = 1, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F.
19. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции ABND, если AB = 9 и AD = 8.

20. На одной из сторон угла, равного α (α< 90°), с вершиной в точке O взяты точки A и B, причём OA = a, OB = b. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.
21. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причём отрезки EF и AC параллельны, BG = 2CG и AC =$2\sqrt{3}$. Найдите GF.
22. В параллелограмме ABCD угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.
23. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.
24. *Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC (AD >BC) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение AD к BC, если AN: NM = к.*
25. *В трапеции ABCD с основаниями AD и BC угол A равен 45°, угол D равен 60°. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найдите отношение AE :ED.*
26. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что OE = 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.
27. *В треугольнике ABC угол B прямой, величина угла A равнаα, точка D — середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.*
28. В выпуклом четырёхугольнике ABCD проведены диагонали AC и BD. Известно, что AD = 2, ∠ABD = ∠ACD = 90°, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC. Указание. Из центров O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, отрезок AD виден под одним и тем же углом. Центр окружности, проходящей через точки O_1,O_2, A и D, лежит на описанной окружности четырёхугольника ABCD.
29. *В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что MN = BC и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC. Указание. Рассмотрите два случая: угол B тупой или острый. Точки M, N и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности.*
30. *В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB. Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON соответственно в точках P и Q. Найдите PQ, если MN = 2.*

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

Практическое занятие 5. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и плоских фигур

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в парах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Презентация наиболее интересных случаев.

Примерный список задач, предлагаемых для решения:

1. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AB = 4.
2. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
3. Две окружности радиусов R и r (R>r) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где Aи B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.
4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.
5. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
6. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
7. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OC = 2$,$OD = \sqrt{3}$.
8. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна$\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.
9. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольникаABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
10. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

Рекомендуемая литература: 2, 3, 4, 9, 10 (из списка).

6. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
УК-5 ОПК-8 ПК-1	Индивидуальное задание	Низкий (неудовлетворительно)	1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.
УК-5 ОПК-8 ПК-1	Итоговая контрольная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент: 1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;

			3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Оценка «отлично» ставится, если студент: 1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт для очного обучения и экзамен для заочного.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на практическом занятии, семинаре

Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях.

Критерии оценивания:
1) полноту и правильность ответа;
2) степень осознанности, понимания изученного;
3) языковое оформление ответа.

Оценка «отлично» ставится, если:
1) студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;
3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

«хорошо» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

«удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:
1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Критерии оценивания самостоятельных письменных и контрольных работ

Оценка «отлично» ставится, если студент:
1. выполнил работу без ошибок и недочетов;
2. допустил не более одного недочета.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней:
1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета;
2. или не более двух недочетов.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил:
1. не более двух грубых ошибок;
2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;
3. или не более двух-трех негрубых ошибок;
4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов;
5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент:
1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»;
2. или если правильно выполнил менее половины работы.

Критерии оценивания письменного зачета (экзамена)

Форма проведения зачета (экзамена) – итоговая контрольная работа.

Критерии оценки:

– оценка «*отлично*» выставляется, если: а) выполнены любые 5 заданий без замечаний; б) выполнено 6 заданий с одним недочетом;

– оценка «*хорошо*» выставляется, если: а) выполнены любые 4 задания без замечаний; б) выполнено 5 заданий с одним недочетом;

– оценка «*удовлетворительно*» выставляется, если: а) выполнены любые 3 задания без замечаний; б) выполнено 4 задания с одним недочетом;

– оценка «не *удовлетворительно*» выставляется, если правильно решено (без недочетов и замечаний) менее 3 заданий.

6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

6.3.1 Программа экзамена

Итоговая (экзаменационная или зачётная) контрольная работа

Демонстрационный вариант

1. Решите неравенство $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geq -3x$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+lgx} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+lgx}\right) \geq -1 + lgx$.
3. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.
4. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной а. Найдите среднюю линию трапеции.
5. Точка D делит основание BC равнобедренного треугольника ABC на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются отрезка AD.
6. Найдите все значения а, при которых уравнение $\left((a-1)x^2+3x\right)^2 - 2\left((a-1)x^2+3x\right) + 1 - a^2 = 0$ имеет ровно два решения.

6.3.2 Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 5. Найдите третью сторону и площадь треугольника.
2. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Кроме того, обе эти окружности касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.
3. Точки D и E расположены на стороне AC треугольника ABC. Прямые BD и BE разбивают медиану AM треугольника ABC на три равных отрезка. Найдите площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна 1.
4. Сторона AB правильного шестиугольника ABCDEF равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Прямая, проходящая через вершину C, касается окружности в точке M. Известно, что CM = 3. Найдите диаметр окружности.
5. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон AB, BC и CD равнобедренной трапеции ABCD, лежит на её большем основании AD. Основание BC равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон AB и CD этой трапеции.
6. Углы при вершинах A и B треугольника ABC равны 75° и 45° соответственно, отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника A_1B_1C, пересекается с прямой AA_1 в точке K. Известно, что CK = a. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
7. Решите неравенство $\frac{2x+3}{3x+2} \geq \frac{4x+1}{x+4}$.

8. Решите неравенство $\frac{20}{(x-3)(x-4)}+\frac{10}{x-4}+1>0$.
9. Решите неравенство $x^2 3^x-3^{x+1}\le 0$.
10. Решите неравенство $(x+1)\log_8(x^2+2x-2)<0$.
11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x}\le 0$.
12. Решите неравенство $\frac{x^2-1}{|x|-1}>0$.
13. Решите неравенство $\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(x+2)}{x}$.
14. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.
15. Найдите все значения а, при которых уравнение $(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))^2-3a(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))+2a^2-a-1=0$

Вариант 2

1. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые из вершины прямого угла, равны 5 и 4. Найдите катеты.
2. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен a, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R соответственно.
3. В треугольник ABC со сторонами AB = 18 и BC = 12 вписан параллелограмм BKLM, причём точки K, L и M лежат на сторонах AB, AC и BC соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC, Найдите стороны параллелограмма.
4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, равны a и b соответственно. Найдите катеты AC и BC.
5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C сторона CA = 4. На катете BC взята точка D, причём CD = 1. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.
6. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.
7. Решите неравенство $\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3}<\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$.
8. Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1$.
9. Решите неравенство $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}$.
10. Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+x-1)<0$.
11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$.
12. Решите неравенство $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$.
13. Решите неравенство $\frac{(|2x+1|-x-2)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1\right)}{2^{x^2}-2^{|x|}}\ge 0$.
14. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.
15. Найдите все значения а, при которых уравнение $(ax^2-2x)^2+(a^2-a+2)(ax^2-2x)-a^2(a-2)=0$ имеет ровно два решения.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии– обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентамиЭлектронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8. ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ ИЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов.–2-3 изд., перерб. и доп.– М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
2. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов.–2-3 изд., перерб. и доп.– М.: Просвещение, 1991. – 346 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.
4. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: ОНИКС 21 век, АЛЬЯНС-В, 2000.
5. Гордин Р.К. ЕГЭ 2011. Математика. Задачи С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. А.Л. Семенова и И. И. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.
6. Сергеев И.Н., Панфёров В.С. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / Под ред. А.Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.
7. Атанасян Л. С, Бутузов В.Ф., Кадомцев СБ., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009.
8. Говоров В. М., Дыбов И Г., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф. Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1986.
9. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. М.: МЦНМО, 2008.
10. Гордин Р. К. Это должен знать каждый школьник. М.: МЦНМО, 2008.
11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Яскир М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998.

12. Математика. ЕГЭ-2010. Типовые тестовые задания / Под ред. А. Л. Семенова и И. В.Ященко. М.: Экзамен, 2009.
13. Математика. Сборник тренировочных работ / Под ред. А. Л. Семенова и И. В.Ященко. М.: МЦНМО, 2009.
14. Мельников И. И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994.
15. Моденов В. П. Пособие по математике. Части I—И. М.: Издательство московского университета, 1977.
16. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Факториал, 1995.
17. Панфёров В. С, Сергеев И. Я. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. ФИПИ; М.: Интеллект-Центр, 2010
18. Погорелов А. В. Геометрия 7—9. М.: Просвещение, 2009.
19. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ- 2010. Математика / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: Астрель, 2009.
20. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: Высшая школа, 1998 и др. издания.
21. Сергеев И. Н. 1000 вопросов и ответов. Математика. М.: Университет книжный дом, 2000.
22. Сергеев И. Н. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М.: Экзамен, 2009.
23. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. М.: КДУ, 2004.
24. Сергеев КН. Математика задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2003.
25. Смирнов В. А. у Смирнова И. М. Геометрия 7—9. М.: Мнемозина, 2009.
26. Смирнов В. А., Смирнова И.М. Геометрия 10—11. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2009.
27. ТкачукВ.В. Математика — абитуриенту. М.: МЦНМО, 2008.
28. Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
29. Шарыгин И. Ф. Решение задач. М.: Просвещение,1994.
30. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач. М.: Просвещение, 1991.
31. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986. (Библиотечка «Квант»; вып. 17).
32. Ященко И.В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике. 2010. М.: МЦНМО, 2009.

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». - Режим доступа: http://www.window.edu.ru/
2. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
3. Сайт Российской академии наук. - Режим доступа: http://www.ras.ru/
4. Сайт Института научной информации по общественным наукам РАН. - Режим доступа: http://www.inion.ru
5. Сайт Министерства науки и высшего образования РФ. - Режим доступа: https://minobrnauki.gov.ru
6. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: https://edu.gov.ru/

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: https://polpred.com/news

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами.

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoftoffice,Libreoffice, OpenOffice; AdobePhotoshop,Matlab, DrWebantivirusи т.п.

Разработчик: доцент кафедры физического и математического образования, к.п.н. Е.В. Калабина.

11. ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2020/2021 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2020/2021 уч. г. на заседании кафедры (протокол № 10 от «16» июня 2020 г.).

В рабочую программу дисциплины внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением: Титульный лист	
Исключить:	Включить:
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2021/2022 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2021/2022 уч. г. на заседании кафедры (протокол № 8 от «21» апреля 2021 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2023/2024 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2023/2024 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 10 от «21» июня 2023 г.).

Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2024/2025 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. на заседании кафедры (протокол № 9 от «24» мая 2024 г.).