

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Щёкина Нера Викторовна  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 07.05.2019 17:12  
Уникальный программный идентификатор:  
a2232a55157e176551a8999b1191c91af5898947047d55610r375a454e57789



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования**

**«Благовещенский государственный педагогический университет»**

**ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА**

**Рабочая программа дисциплины**

**УТВЕРЖДАЮ**

**И.о. декана физико-математического  
факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»**

**О.А. Днепровская  
«22» мая 2019 г.**

**Рабочая программа дисциплины**

**НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ**

**Направление подготовки  
44.03.01 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

**Профиль  
«МАТЕМАТИКА»**

**Уровень высшего образования  
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята на заседании кафедры  
физического и математического  
образования  
(протокол № 9 от «15» мая 2019 г.)**

**Благовещенск 2019**

**СОДЕРЖАНИЕ**

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....	3
2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ .....	4
3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ) .....	4
4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	6
5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....	7
6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....	14
7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ.....	17
В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....	17
8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ .....	17
9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ .....	18
10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА .....	19
11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ.....	20

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**1.1 Цель дисциплины:** углубление и систематизация знаний в области элементарной математики и развитие умений использовать различные методы и приемы решения задач повышенной трудности углубленного курса школьной математики.

**1.2 Место дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Нестандартные задачи школьного курса математики» относится к дисциплинам обязательной части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б.1. В.04.

**1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:** УК-1, ПК-2, ОПК-8:

**УК-1.** Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач, **индикаторами** достижения которой является:

- УК-1.3 Аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.

**ПК-2.**Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования;**индикаторами**достижения которой является:

- ПК-2.2 Владеетосновными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

**ОПК-8.** Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний, **индикаторами** достижения которой является:

- ОПК-8.3 Демонстрирует специальные научные знания в т.ч. в предметной области

**1.4 Перечень планируемых результатов обучения.** В результате изучения дисциплины студент должен

**знать**

основные понятия и строгие доказательства теоретических фактов основных тем дисциплины;

**уметь**

применять теоретические знания к решению нестандартных задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;

**владеть**

- различными приемами и методами решения нестандартных задач (задач с параметрами, комбинированных неравенств)элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
- техникой применения частных математических методов к решению задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
- теорией и практикой геометрии треугольника и других плоских фигур;
- различными приемами и методами измерения и вычисления площадей плоских фигур и применением метода площадей к вычислению элементов плоских геометрических фигур.

**1.5 Общая трудоемкость дисциплины**«Нестандартные задачи школьного курса математики» составляет 3 зачетные единицы (далее – ЗЕ)(108 часов).

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

**1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности**

**Объем дисциплины и виды учебной деятельности (заочная форма обучения)**

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 9
--------------------	-------------	-----------

Общая трудоемкость	108	108
Аудиторные занятия	18	18
Лекции	6	6
Практические занятия	12	12
Самостоятельная работа	86	86
Вид итогового контроля	4	Зачёт с оценкой

## 2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 2.1 Заочная форма обучения

#### Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Тема1. Задачи с параметрами	27	1	4	22
2.	Тема2. Комбинированные неравенства.	23	1	2	20
3.	Тема3. Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи..	24	2	2	20
4.	Тема4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	30	2	4	24
<b>Зачёт с оценкой</b>		<b>4</b>			
<b>ИТОГО</b>		<b>108</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>86</b>

#### Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема2. Комбинированные неравенства.	п	Работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств.	2
2.	Тема3. Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи..	п	Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи.	2
3.	Тема4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	п	Работа в парах: решение демонстрационного варианта контрольной работы. Обсуждение способов решения задач.	2
<b>ИТОГО</b>				<b>6</b>

## 3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

### **Тема 1. Задачи с параметрами**

Параметр. Двойственная природа параметра. Параметр и поиск решений. Параметр и количество решений. Параметр и свойства решений. Аналитические способы решения задач с параметрами. Свойства функций в задачах с параметрами. Графические приёмы решения задач с параметрами: пересечение линий, параллельный перенос, поворот, система координат  $(a, x)$ .

### **Тема 2. Комбинированные неравенства**

Рациональные неравенства, метод интервалов. Примеры решений. Модуль математического выражения. Виды неравенств с модулем, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений неравенств с модулем. Иррациональные неравенства, их основные виды, алгоритмы решения иррациональных неравенств. Метод замены множителя. Примеры решения иррациональных неравенств. Показательные неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Логарифмические неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений показательных и логарифмических неравенств. Тригонометрические неравенства, простейшие тригонометрические неравенства, алгоритмы их решения. Методы решения тригонометрических неравенств. Примеры решений. Трансцендентное неравенство, комбинированное неравенство. Методы решения комбинированных неравенств. Метод рационализации, метод постановки. Применение свойств функций при решении комбинированных неравенств. Системы трансцендентных и комбинированных неравенств. Примеры решений неравенств и их систем.

### **Тема 3. Геометрия треугольника. Четырёхугольники. Исследовательские задачи**

Определение, виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами треугольника: теорема косинусов, теорема синусов. Медианы, биссектрисы, высоты треугольника, точки их пересечения. Свойства замечательных линий и точек треугольника. Средняя линия треугольника, ее свойства. Вписанные и описанные треугольники. Прямоугольный треугольник, соотношение между сторонами и углами, свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника, проведенных к гипотенузе. Равные и подобные треугольники, их признаки. Формулы для вычисления площади треугольника. Площадь подобных треугольников.

Параллелограмм: определение, свойства, признаки. Метрическое свойство диагоналей параллелограмма. Прямоугольник: определение, свойства, признаки. Ромб: определение, свойства, признаки. Квадрат. Трапеция. Равнобокая трапеция, ее свойства. Средняя линия трапеции. Пропорциональные отрезки в трапеции. Вписанные и описанные четырехугольники, их признаки. Формулы для вычисления площадей четырехугольников.

### **Тема 4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур**

Определение окружности, длина окружности, длина дуги окружности. Определение круга, площадь круга, площадь сектора. Касательная к окружности, свойства касательных, свойства касательной и секущей, свойства хорд. Центральный угол, вписанный угол, их свойства; угол между хордой и касательной. Метод вспомогательной окружности.

Касающиеся окружности: внутреннее и внешнее касание. Свойства общей касательной. Пересекающиеся окружности. Окружность, вписанная в треугольник; окружность, описанная около треугольника; их центры, формулы для вычисления радиусов. Окружность, вписанная в четырехугольник; окружность, описанная около четырехугольника; положение их центра. Правильные многоугольники, их вписанные и описанные окружности, вычисление радиусов этих окружностей. Внеписанные окружности.

## **4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **4.1 Общие методические рекомендации**

Согласно учебного плана организация учебной деятельности по дисциплине «Нестандартные задачи школьного курса математики» предусматривает следующие формы: лекция, практическое занятие, самостоятельная работа, контрольная работа. Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, активной работы на семинарах, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

### **4.2 Методические рекомендации по подготовке к лекциям**

Курс лекций строится на основе четких понятий и формулировок, так как только при таком походе студенты приобретают культуру абстрактного мышления, необходимую для высококвалифицированного специалиста в любой отрасли знаний, а также на разборе типовых задач и алгоритмов их решения. Необходимо избегать механического записывания текста лекции без осмысливания его содержания.

### **4.3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

При подготовке к практическим занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы.

### **4.4. Методические указания к самостоятельной работе студентов**

Для успешного усвоения дисциплины необходима правильная организация самостоятельной работы студентов. Эта работа должна содержать:

- регулярную (еженедельную) проработку теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованной литературе;
- регулярную (еженедельную) подготовку к практическим занятиям, в том числе выполнение домашних заданий;
- подготовка к контрольной работе и ее успешное выполнение.

В качестве образца решения задач следует брать те решения, которые приводились преподавателем на лекциях или выполнялись на практических занятиях. При появлении каких-либо вопросов следует обращаться к преподавателю в часы его консультаций. Критерием качества усвоения знаний могут служить аттестационные оценки по дисциплине и текущие оценки, выставляемые преподавателем в течение семестра. При подготовке к контрольной работе по определенному разделу дисциплины полезно выписать отдельно все формулы, относящиеся к данному разделу, и все используемые в них обозначения. Также при подготовке к контрольной работе следует просмотреть конспект практических занятий и выделить в практические задания, относящиеся к данному разделу. Если задания на какие – то темы не были разобраны на занятиях (или решения которых оказались не понятными), следует обратиться к учебной литературе, рекомендованной преподавателем в качестве источника сведений. Полезно при подготовке к контрольной работе самостоятельно решить несколько типичных заданий по соответствующему разделу. В каждом семестре предусматривается проведение одной контрольной работы.

### **4.5. Методические указания к зачету**

Рабочая программа содержит программу экзаменов и зачетов, которая позволит наиболее эффективно организовать подготовку к ним. Это процесс, в течение которого проверяются полученные знания за курс (семестр): уровень теоретических знаний; развитие творческого мышления; навыки самостоятельной работы; умение синтезировать полученные знания и применять их в решение практических задач.

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы  
студентов по дисциплине**

<b>№</b>	<b>Наименование раздела (темы)</b>	<b>Формы/виды самостоятельной работы</b>	<b>Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом</b>
1.	Задачи с параметрами	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	22
2.	Комбинированные неравенства.	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	20
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	Конспект «Теорема Чевы, Теорема Менелая» ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	20
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ Подготовка к итоговой контрольной работе	24
	<b>ИТОГО</b>		<b>86</b>

## 5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (в условиях заочного обучения)

#### Тема 1. Задачи с параметрами

**Практическое занятие 1. Задачи с параметрами. Аналитические способы решения**

##### План

1. Параметр и поиск решений.
2. Параметр и количество решений.
3. Параметр и свойства решений.
4. Свойства функций в задачах с параметрами.

##### Задачи, предлагаемые для решения

- 1) Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :
  - a.  $(a - 5)x^2 + 3ax - (a - 5) = 0$ ,
  - b.  $(4 - a)x^2 - 6ax + 3 = 0$
- 2) При каких значениях  $a$  уравнение  $ax^2 + (1 - a^2)x - a = 0$  имеет хотя бы одно решение?
- 3) Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство не имеет решений.
  - a.  $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ ,
  - b.  $ax^2 - 3x + a \leq 0$
- 4) Найдите все значения  $m$ , при которых решением неравенства является любое действительное число
  - a.  $x^2 - mx + (3 - m) > 0$ ,

$$b. ax^2 - 2ax + 1 > 0$$

- 5) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  следует неравенство  $(a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0$ .
- 6) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых множество решений неравенства  $x(x - 4) \geq (a + 2)(|x - 2| - 2)$  включает все члены некоторой арифметической прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна  $0,5$ .
- 7) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 4x + 3|$  больше 1.
- 8) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$  больше 1.
- 9) Найдите наибольшее значение  $a$ , при котором уравнение  $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$  с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен  $-2$ .

### Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (9): П.70 – П.90, П.120 – П.123, П.141 – П.145, П.168 – П. 172.

Рекомендуемая литература: (1), (6), (9), (17), (29).

### Практическое занятие 2. Задачи с параметрами. Графические приемы решения

#### План

1. Пересечение линий.
2. Параллельный перенос.
3. Поворот.
4. Система координат  $(a, x)$ .

#### Задачи, предлагаемые для решения

- 1) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$  имеет единственное решение.
- 2) Найдите все  $a$ , при которых система  $\begin{cases} x^2 + (8a + 4)x + 7a^2 + 4a < 0, \\ x^2 + a^2 = 16. \end{cases}$  имеет решения.
- 3) При каких значениях  $a$  система имеет единственное решение  $\begin{cases} \log_2(a + x) \leq 1, \\ |a - x| \leq 1. \end{cases}$
- 4) Найдите все значения параметра  $b$ , при которых корни уравнения существуют и принадлежат отрезку  $[2; 17]$ :  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = b$ .
- 5) Найдите все значения  $p$ , при которых уравнение  $8 \sin^3 x = p + 9 \cos 2x$  не имеет корней.
- 6) При каких значениях  $a$  число корней уравнения  $|x^2 - 8|x| + 7| = a$  равно  $a$ .
- 7) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых график функции  $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$  пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.
- 8) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых график функции  $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$  пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.
- 9) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых решения неравенства  $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$  образует отрезок длиной 1.
- 10) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых решения неравенства  $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$  образует отрезок длиной 1.
- 11) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2|2|x| - a^2| = x - a$  имеет три различных решения.



- 12) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 2x) = 0$  имеет ровно три корня.
- 13) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$  имеет ровно три корня?
- 14) Найдите все значения  $a$ , при которых система  $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$  имеет единственное решение.
- 15) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$  не имеет решений.

#### Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (9): П.211 – П.221, П.249 – П.260, П.324 – П.340.

Рекомендуемая литература: (1), (6), (9), (17), (29).

### Тема 2. Комбинированные неравенства.

#### Практическое занятие 3. Комбинированные неравенства

Проводится в интерактивной форме (работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств).

#### Задание для самостоятельной работы в парах

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x + 1 - \log_3 9x}{1 - \log_3 x} \geq 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$$

7. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leq 0.$$

### Тема 3. Геометрия треугольника. Четырёхугольники. Исследовательские задачи.

#### Практическое занятие 4. Геометрия треугольника. Замечательные линии и точки треугольника

##### План

1. Медиана треугольника, свойства точки пересечения. Медиана прямоугольного треугольника.
2. Биссектриса треугольника, её свойства.

3. Свойства высот треугольника и точки их пересечения.
4. Решение исследовательских задач (выделенных курсивом).

Интерактивная форма работы: решение задач в малых группах (задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18).

#### **Задачи, предлагаемые для решения**

1. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами тип. Найдите стороны треугольника.
2. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведены высота  $CD$  и медиана  $CE$ . Площади треугольников  $ABC$  и  $CDE$  равны соответственно 10 и 3. Найдите  $AB$ .
3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты  $AB$  и  $AC$  равны 4 и 3 соответственно. Точка  $D$  делит гипотенузу  $BC$  пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ADC$  и  $ABD$ .
4. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен  $30^\circ$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.
5. В четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ . Отрезок, соединяющий вершину  $C$  с серединой  $M$  отрезка  $AD$ , равен  $\frac{5}{4}$ ,  $AP = 1$ . Расстояние от точки  $P$  до отрезка  $BC$  равно  $\frac{1}{2}$ . Найдите  $AD$ , если известно, что вокруг четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность. Указание. Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на сторону  $BC$ . Тогда точки  $M$ ,  $P$  и  $H$  лежат на одной прямой, а треугольник  $PHC$  подобен треугольнику  $APD$ .
6. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите площадь трапеции. Указание. Если сумма углов при основании трапеции равна  $90^\circ$ , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.
7. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны  $40^\circ$  и  $50^\circ$ . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.
8. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.
9. Гипотенуза  $KM$  прямоугольного треугольника  $KMP$  является хордой окружности радиуса  $\sqrt{7}$ . Вершина  $P$  находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно  $\sqrt{3}$ . Найдите острые углы треугольника  $KMP$ .
10. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = c$ ,  $AC = b$  ( $b > c$ ),  $AD$  — биссектриса. Через точку  $D$  проведена прямая, перпендикулярная  $AD$  и пересекающая  $AC$  в точке  $E$ . Найдите  $AE$ . Указание. Соедините точку  $D$  с серединой отрезка  $AE$ .
11. Точка  $E$  лежит на стороне  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$ ; точка  $K$  — середина отрезка  $AE$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно прямой  $AB$ , и прямая, проходящая через точку  $C$  перпендикулярно прямой  $BC$ , пересекаются в точке  $D$ . Найдите углы треугольника  $BKD$ . Указание. Точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $K$  и точка пересечения прямых  $AB$  и  $DE$  лежат на окружности с диаметром  $BD$ .
12. В трапеции  $ABCD$  точка  $K$  — середина основания  $AB$ ,  $M$  — середина основания  $CD$ . Найдите площадь трапеции, если известно, что  $DK$  — биссектриса угла  $D$ ,  $BM$  — биссектриса угла  $B$ , наибольший из углов при основании  $AB$  равен  $60^\circ$ , а периметр равен 30.
13. Найдите высоты треугольника, если его площадь равна  $S$ , а углы равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

14. В остроугольном треугольнике  $ABC$  с углом  $C$ , равным  $30^\circ$ , высоты пересекаются в точке  $M$ . Найдите площадь треугольника  $AMB$ , если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , до сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно равны  $\sqrt{2}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
15. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BM$  и  $CN$ ,  $O$  — центр вписанной окружности. Известно, что  $BC = 24$ ,  $MN = 12$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $BOC$ .
16. Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Известно, что отрезок  $CH$  равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол  $ACB$ .
17. Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Известно, что  $CH = AB$ . Найдите угол  $ACB$ .
18. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 2$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Найдите расстояние от вершины  $B$  до точки пересечения высот.
19. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Прямая  $DE$  делит площадь треугольника пополам и образует с прямой  $AB$  угол  $15^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
20. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $CM$  и  $AN$ . Известно, что  $AC = 2$ , а площадь круга, описанного около треугольника  $MBN$ , равна  $\frac{\pi}{3}$ . Найдите угол между высотой  $CM$  и стороной  $BC$ .

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

#### **Тема 4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.**

#### **Практическое занятие 5. Окружность. Круг. Отрезки и углы, связанные с окружностью**

##### **План**

1. Касательная к окружности.
2. Пропорциональные отрезки в окружности.
3. Углы, связанные с окружностью. Метод вспомогательной окружности.
4. Решение исследовательских задач (выделенных курсивом).

##### **Задачи, предлагаемые для решения**

1. Из точки  $M$ , лежащей вне окружности радиуса  $1$ , проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные  $MA$  и  $MB$ . Между точками касания  $A$  и  $B$  на меньшей дуге  $AB$  взята произвольная точка  $C$  и через неё проведена третья касательная  $KL$ , образующая с касательными  $MA$  и  $MB$  треугольник  $KLM$ . Найдите периметр этого треугольника.
2. На основании равнобедренного треугольника, равном  $8$ , как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна  $3$ .
3. Радиусы двух окружностей равны  $27$  и  $13$ , а расстояние между центрами равно  $50$ . Найдите длины общих касательных к этим окружностям.
4. Две окружности радиусов  $4$  и  $3$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются некоторой прямой в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезков  $O_1O_2$  и  $M_1M_2$  равно  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Найдите  $O_1O_2$ .

5. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются некоторой прямой в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков  $M_1M_2$  и  $O_1O_2$  равно  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . Найдите  $M_1M_2$ .
6. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $AC$  равен 16 и катет  $BC$  равен 12. Из центра  $B$  радиусом  $BC$  описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет  $BC$  продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.
7. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.
8. Найдите длину хорды, если дан радиус  $r$  окружности и расстояние  $a$  от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.
9. Один из смежных углов с вершиной  $A$  вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Найдите углы треугольника  $O_1AO_2$ , если отношение радиусов окружностей равно  $\sqrt{3}$ .
10. Через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведена окружность, которая пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ , а сторону  $AC$  — в точке  $E$ . Найдите  $AE$ , зная, что  $AK = KB = a$ ,  $\angle BCK = \alpha$ ,  $\angle CBE = \beta$ .
11. Окружность, построенная на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре, проходит через середину стороны  $BC$  и пересекает в точке  $D$  продолжение стороны  $AB$  за точку  $A$ , причём  $AD = \frac{2}{3}AB$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC = 1$ .
12. Каждая из боковых сторон  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании  $AC$  хорду  $DE$ . Найдите отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $BDE$ , если  $AB = BC = 3$  и  $AC = 4$ .
13. Окружность, диаметр которой равен  $\sqrt{10}$ , проходит через соседние вершины  $A$  и  $B$  прямоугольника  $ABCD$ . Длина касательной, проведённой из точки  $C$  к окружности, равна 3,  $AB = 1$ . Найдите сторону  $BC$ .
14. Окружность проходит через соседние вершины  $M$  и  $N$  прямоугольника  $MNPQ$ . Длина касательной, проведённой из точки  $Q$  к окружности, равна 1,  $PQ = 2$ . Найдите площадь прямоугольника  $MNPQ$ , если диаметр окружности равен  $\sqrt{5}$ .
15. Окружность, проходящая через вершины  $B$ ,  $C$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$ , касается прямой  $AD$  и пересекает прямую  $AB$  в точках  $V$  и  $E$ . Найдите  $AE$ , если  $AD = 4$  и  $CE = 5$ .
16. Из точки  $A$ , находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие  $AKC$  и  $ALB$ , угол между которыми равен  $30^\circ$  ( $K$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $B$  — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника  $AKL$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 10.
17. На прямой расположены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что  $BC = 3$ ,  $AB = 2CD$ . Через точки  $A$  и  $C$  проведена некоторая окружность, а через точки  $B$  и  $D$  — другая. Их общая хорда пересекает отрезок  $BC$  в точке  $K$ . Найдите  $BK$ .
18. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Найдите  $BC$ , если известно, что  $AC = 1$ , а вершина  $A$  лежит на окружности, проходящей через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ .
19. Окружность касается сторон  $AB$  и  $AD$  прямоугольника  $ABCD$  и проходит через вершину  $C$ . Сторону  $DC$  она пересекает в точке  $N$ . Найдите площадь трапеции  $ABND$ , если  $AB = 9$  и  $AD = 8$ .

20. На одной из сторон угла, равного  $\alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ), с вершиной в точке  $O$  взяты точки  $A$  и  $B$ , причём  $OA = a$ ,  $OB = b$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$  и касающейся другой стороны угла.
21. На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $E$ . На стороне  $BC$  взята точка  $G$  так, что отрезок  $AG$  пересекает окружность в точке  $F$ , причём отрезки  $EF$  и  $AC$  параллельны,  $BG = 2CG$  и  $AC = 2\sqrt{3}$ . Найдите  $GF$ .
22. В параллелограмме  $ABCD$  угол  $B CD$  равен  $150^\circ$ , а сторона  $AD$  равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой  $CD$  и проходящей через вершину  $A$ , а также пересекающей сторону  $AD$  на расстоянии 2 от точки  $D$ .
23. Окружность и прямая касаются в точке  $M$ . Из точек  $A$  и  $B$  этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные  $a$  и  $b$  соответственно. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ .
24. *Равнобедренная трапеция с основаниями  $AD$  и  $BC$  ( $AD > BC$ ) описана около окружности, которая касается стороны  $CD$  в точке  $M$ . Отрезок  $AM$  пересекает окружность в точке  $N$ . Найдите отношение  $AD$  к  $BC$ , если  $AN : NM = k$ .*
25. *В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  угол  $A$  равен  $45^\circ$ , угол  $D$  равен  $60^\circ$ . На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках  $M$  и  $N$ . Хорда  $MN$  пересекает основание  $AD$  в точке  $E$ . Найдите отношение  $AE : ED$ .*
26. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Известно, что  $OE = 1$ , а вершина  $A$  лежит на окружности, проходящей через точки  $E$ ,  $D$  и  $O$ . Найдите стороны и углы треугольника  $EDO$ .
27. *В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  прямой, величина угла  $A$  равна, точка  $D$  — середина гипотенузы. Точка  $C_1$  симметрична точке  $C$  относительно прямой  $BD$ . Найдите угол  $AC_1B$ .*
28. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  проведены диагонали  $AC$  и  $BD$ . Известно, что  $AD = 2$ ,  $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ , а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ACD$ , равно  $\sqrt{2}$ . Найдите  $BC$ . Указание. Из центров  $O_1$  и  $O_2$  окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ACD$ , отрезок  $AD$  виден под одним и тем же углом. Центр окружности, проходящей через точки  $O_1, O_2, A$  и  $D$ , лежит на описанной окружности четырёхугольника  $ABCD$ .
29. *В треугольнике  $ABC$  перпендикуляр, проходящий через середину стороны  $AB$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $M$ , а перпендикуляр, проходящий через середину стороны  $AC$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что  $MN = BC$  и прямая  $MN$  перпендикулярна прямой  $BC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ . Указание. Рассмотрите два случая: угол  $B$  тупой или острый. Точки  $M, N$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности.*
30. *В равносторонний треугольник  $ABC$  вписана полуокружность с центром  $O$  на стороне  $AB$ . Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны  $BC$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон  $BC$  и  $AC$  с полуокружностью, пересекает отрезки  $OM$  и  $ON$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите  $PQ$ , если  $MN = 2$ .*

#### **Задание для самостоятельной работы**

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

#### **Практическое занятие 6. Решение демонстрационного варианта итоговой (экзаменационной) контрольной работы**

Занятие проводится в интерактивной форме: работа в парах, обсуждение способов решения задач.

## Вариант 0

1. Решите неравенство  $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geq -3x$ .
2. Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{2}} \left( 5^{1+\lg x} - \left( \frac{1}{2} \right)^{1+\lg x} \right) \geq -1 + \lg x$ .
3. Найдите радиус окружности, касающейся двух concentрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.
4. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной  $a$ . Найдите среднюю линию трапеции.
5. Точка  $D$  делит основание  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AD$ .
6. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$  имеет ровно два решения.

## 6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМО-КОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

### 6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
УК-1, ПК-2, ОПК-8	Индивидуальное задание	Низкий (неудовлетворительно)	Самостоятельная работа не засчитывается, если студент: 1) допустил число ошибок и недочетов, превосходящее норму, при которой может быть достигнут пороговый показатель; 2) или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1) не более двух грубых ошибок; 2) или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3) или не более двух-трех негрубых ошибок; 4) или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5) или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1) не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2) или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Студент 1) выполнил работу без ошибок и недочетов; 2) допустил не более одного недочета.

## 6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

### Критерии оценивания ответа на зачете

Форма проведения зачета – итоговая контрольная работа.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется, если: а) выполнены любые 5 заданий без замечаний; б) выполнено 6 заданий с одним недочетом;
- оценка «хорошо» выставляется, если: а) выполнены любые 4 задания без замечаний; б) выполнено 5 заданий с одним недочетом;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если: а) выполнены любые 3 задания без замечаний; б) выполнено 4 задания с одним недочетом;
- оценка «не удовлетворительно» выставляется, если правильно решено (без недочетов и замечаний) менее 3 заданий.

## 6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

### 6.3.1 Индивидуальное задание (примерные варианты)

#### Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 5. Найдите третью сторону и площадь треугольника.
2. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом. Кроме того, обе эти окружности касаются внутренним образом окружности радиуса  $R$  с центром  $O$ . Найдите периметр треугольника  $OO_1O_2$ .
3. Точки  $D$  и  $E$  расположены на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $BD$  и  $BE$  делят медиану  $AM$  треугольника  $ABC$  на три равных отрезка. Найдите площадь треугольника  $BDE$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 1.
4. Сторона  $AB$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  равна  $\sqrt{3}$  и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Прямая, проходящая через вершину  $C$ , касается окружности в точке  $M$ . Известно, что  $CM = 3$ . Найдите диаметр окружности.
5. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , лежит на её большем основании  $AD$ . Основание  $BC$  равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон  $AB$  и  $CD$  этой трапеции.
6. Углы при вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  равны  $75^\circ$  и  $45^\circ$  соответственно, отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты треугольника. Касательная в точке  $C$  к окружности, описанной около треугольника  $A_1B_1C$ , пересекается с прямой  $AA_1$  в точке  $K$ . Известно, что  $CK = a$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

7. Решите неравенство  $\frac{2x+3}{3x+2} \geq \frac{4x+1}{x+4}$ .
8. Решите неравенство  $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 > 0$ .
9. Решите неравенство  $x^2 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ .
10. Решите неравенство  $(x+1) \log_8(x^2 + 2x - 2) < 0$ .
11. Решите неравенство  $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0$ .
12. Решите неравенство  $\frac{x^2-1}{|x|-1} > 0$ .
13. Решите неравенство  $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}$ .
14. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$  на промежутке  $(0; +\infty)$  имеет более двух корней.
15. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $(\log_2(x+a) - \log_2(x-a))^2 - 3a(\log_2(x+a) - \log_2(x-a)) + 2a^2 - a - 1 = 0$

#### Вариант 2

1. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые из вершины прямого угла, равны 5 и 4. Найдите катеты.
2. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен  $a$ , а радиусы вписанной и описанной окружностей равны  $r$  и  $R$  соответственно.
3. В треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 18$  и  $BC = 12$  вписан параллелограмм  $BKLM$ , причём точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет  $\frac{4}{9}$  площади треугольника  $ABC$ . Найдите стороны параллелограмма.
4. Около прямоугольного треугольника  $ABC$  описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы  $AB$  до прямой, касающейся окружности в точке  $C$ , равны  $a$  и  $b$  соответственно. Найдите катеты  $AC$  и  $BC$ .
5. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  сторона  $CA = 4$ . На катете  $BC$  взята точка  $D$ , причём  $CD = 1$ . Окружность радиуса  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  проходит через точки  $C$  и  $D$  и касается в точке  $C$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
6. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.
7. Решите неравенство  $\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$ .
8. Решите неравенство  $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$ .
9. Решите неравенство  $(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}+2)^{x-1}$ .
10. Решите неравенство  $\log_{x^2}(x^2+x-1) < 0$ .
11. Решите неравенство  $\frac{\sqrt{2-x+4x-3}}{x} \geq 2$ .
12. Решите неравенство  $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leq 0$ .
13. Решите неравенство  $\frac{(|2x+1|-x-2)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1\right)}{2x^2-2|x|} \geq 0$ .
14. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\left| \frac{6}{x} - 5 \right| = ax - 1$  на промежутке  $(0; +\infty)$  имеет более двух корней.
15. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$  имеет ровно два решения.



## Итоговая (зачетная) контрольная работа (демонстрационный вариант)

### Вариант 0

1. Решите неравенство  $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geq -3x$ .
2. Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{2}} \left( 5^{1+lgx} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+lgx} \right) \geq -1 + lgx$ .
3. Найдите радиус окружности, касающейся двух concentрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.
4. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной  $a$ . Найдите среднюю линию трапеции.
5. Точка  $D$  делит основание  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AD$ .
6. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$  имеет ровно два решения.

## 7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

**Информационные технологии** – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

## 8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ ИЛИ ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в разделе «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

## 9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

### 9.1 Литература

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов.-3-е изд., перераб. и доп.- М.: Просвещение, 1995– 348 с. (21 экз.)
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007. - 239 с. (21 экз.)
3. Далингер, В. А. Математика: обратные тригонометрические функции. Решение задач : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 147 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08452-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/492727>
4. Локоть, В.В. Задачи с параметрами и их решения. Тригонометрия : уравнения, неравенства системы. 10 класс / В. В. Локоть ; ред. С. В. Зотиков. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : АРКТИ, 2004. - 63 с. - (Абитуриент: Готовимся к ЕГЭ. Математика). - ISBN 5-89415-273-9 (10 экз.)
5. Мельников И. И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994. 302 с. (10 экз.)
6. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Факториал, 1995. (2 экз.)
7. Яценко, И.В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки. Ключи и ответы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : профильный уровень / И. В. Яценко, С. А. Шестаков. - М. : Просвещение, 2017. - 384 с. - ISBN 978-5-09-048716-0 (4 экз.)

### 9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: <https://mathematics.ru/>.
2. Математические этюды. - Режим доступа: <http://www.etudes.ru/>.
3. Федеральный портал «Российское образование» -Режим доступа: <http://www.edu.ru>.
4. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - Режим доступа: <http://www.window.edu.ru>.
5. Портал Электронная библиотека: диссертации-Режим доступа: <http://diss.rsl.ru/?menu=disscatalog>.
6. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
7. Сайт Министерства науки и высшего образования РФ. - Режим доступа: <https://minobrnauki.gov.ru>.
8. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки. - Режим доступа: <http://www.obrnadzor.gov.ru/ru>.
9. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: <https://edu.gov.ru>.
10. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: [www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru)

### 9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». – Режим доступа: <https://urait.ru>
2. Полпред (обзор СМИ). – Режим доступа: <https://polpred.com/news>

## 10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами.

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoftoffice, Libreoffice, OpenOffice; AdobePhotoshop, Matlab, DrWebantivirusи т.п.

Разработчик: Калабина Е.В., кандидат педагогических наук, доцент

## 11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

### Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2020/2021 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2020/2021 уч. г. на заседании кафедры (протокол № 10 от «16» июня 2020 г.).

В рабочую программу дисциплины внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением: Титульный лист	
Исключить:	Включить:
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

### Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2021/2022 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2021/2022 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 8 от «21» апреля 2021 г.).

### Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2022/2023 уч. г.

РПД пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022/2023 учебном году на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 1 от 21 сентября 2022 г.).

В рабочую программу внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 2 № страницы с изменением: 18	
В Раздел 9 внесены изменения в список литературы, в базы данных и информационно-справочные системы, в электронно-библиотечные ресурсы. Указаны ссылки, обеспечивающие доступ обучающимся к электронным учебным изданиям и электронным образовательным ресурсам с сайта ФГБОУ ВО «БГПУ».	